B.Şapyýew

YKDYSADY – MATEMATIKI MODELLER

Aşgabat – 2010

GIRIŞ.

Beýik Galkynyşlar we özgertmeler eýýamynda Garaşsyz we Baky Bitarap Watanymyzda uly özgertmeler bolup geçýär. Bu özgertmeler esasan ýurdyň ykdysady we ilatyň ýaşaýayş durmuş derejesini ýokary götermek maksadyndan ybaratdyr.

Ýurtda ykdysady ösüşi ýokarlandyrmak gönüden-güni ykdysady sistemany dogry we optimal çözüwler tapmak bilen dolandyrmaklyga baglanşyklydyr. Şonuň üçin hem ýönekeý kärhananyň ykdysady tarapdan ýokary görkezijilerini gazanmaklykdan başlap tutuş ýurt boýunça pudaklarda ýokary ykdysady görkezijileri gazanmaklygy talap edýändir. Beýle talaplary gazanmaklykda kärhanalary dolandyrmagyň optimal çözüwlerini berjek ykdysady-matematiki modellerini düzmekligi başarmakdan başlap tutuş pudaklaryň ykdysady görkezijilerini ýokarlandyrmaga ýardam berjek ykdysady-matematiki modellerini düzmekligi we olaryň optimal çözüwlerini tapmagy talap edýändir.

Ykdysady-matematiki modeller düzmegi we olaryň optimal çözüwlerini tapmaklygyň kämilleşen usullaryny öwrenmeklige şu okuw gollanmasy ýardam berer diýip tama edýäris. Bu okuw gollanmasynda ykdysady sistemalary optimal dolandyrmaklyga degişli meseleleri çyzykly programmirlemegiň esasy meselesine getirmek arkaly çyzykly programmirlemegiň meselelerini çözmegiň kämilleşen usullary ulanylýar.

Şeýle hem bu okuw gollanmasy pudaklardaky ykdysady görkezijileriň derejelerini derňemekde korrelýasion modelleri ulanmaklygyň ähmiýeti barada düşünjeleri berýändir.Mundan başda hem biri-birine baglanşykly önümçilik prosessleri bolan kärhanalaryň arasynda taýar önümleri öndürijilerden talap edijilere we önüm öndürmäge zerur bolan çig mal matrisallary degişli talap edijilere daşamaklykda edilýän ulag çykdaýjylaryny azaltmaklyga mümkinçilik berýän optimal çözüwlere gelmegiň planyny düzmäge ýardam berjek usullar görkez

1. Model düzmegiň esaslary.

§ 1.1. Model düşünjesi

Önümçiligiň ähli ösüş masyştabynda, çykarylýan harytlaryň ýokary depginli

1. Maksadyň
2. Özarabaglanşygy we özarabaglylygy forma getirilen görnüşde bermeklik zerurdyr.
3. Real ykdysady sistemany şekillendirmekde ýönekeýleşdirmek maksadalaýyklygy.
4. Goýlan maksada degişliligi.
5. Zerur bolan ynamlylygy üpjin edijiligi.

Bu belenilen talaplaryň t

tarapyny üpjin eder we netije almaga mümkinçilik dörär.

TEMA2. § 1.2. Modelirlenmekde Çyzykly algebranyň elementleri.

Önümçilik proseslerıň matematiki modelirlenmegi kärhananyň tertipleşdirilen görnüşde ýatýan maglumatlar sistemasyna esaslanmalydyr. Mysal üçin, kärhanalary meýilleşdirmek hususy ýagdaýda material çykdaýjylaryň normasynda esaslanýandyr.

Eger i bilen kärhanada çykarylýan önümi bellesek, j bilen bolsa önümi öndürmek üçin zerur bolan resursy onda bu simwollar a üýtgeýäniň indeksleri bolup çykyş ederler.

a_{ij} i-nji önümi çykarmakda j-nji resursdan edilýän çykdaýjynyň normasy. Şeýlelikde kärhanada n görnüşli önüm öndürlende m görnüşli resurslardan ediljek material çykdaýjylaryň normasyny aşakdaky tablisa görnüşinde bermek bolar.

Tablisa 2.1

Resurslar tertibi	Önümleriň tertibi				
	1	2	3	· · ·	n
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	· · ·	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	· · ·	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	· · ·	a_{mn}

Tablisanyň içiki bölegi m x n sanda durýar, (Skobka) ýaý içine alnan ätiýaçlygyň göniburçly görnüşine m setirli we n sütünli ýa-da m x n ölçegli göni burçly matrisa diýilýär.

Matrisany aşakdaky ýaly ýazýarys.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ýa-da gysgaça A = (a_{ij}, i = $\overline{1,m}$; j =$\overline{1,n}$

a_{ij} sana matrisanyň elementleri diýilýär. Üns bersek matrisanyň her bir elementi iki indekslidir, bularyň birinjisi matrisanyň setiriň tertibini, ikinijisi bolsa sütüniň tertibini aňladýandyr, kesişmede bolsa şol seredilýän element ýerleşýändir.

Eger matrisanyň setiriniň sany onuň sütüniniň sanyna deň bolsa onda beýle matrisa kwadrat matrisa diýilýär. Matrisanyň a_{11}, a_{12}, ... a_{mn} elementlerine baş diognal elementleri diýilýär.

Bir elementden durýan matrisa ýöne bir sandyr.

Käbir ýagdaýlarda maglumatlar matrisada bir setirde ýa-da sütünde berlip bilner.

Mysal üçin, gurallaryň işleýän wagtyň fondy hakyndaky maglumatlaryň ýazgysyny bir sütün görnüşde aňladyp bolar.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ bm \end{pmatrix}$$

Bir setirden durýan matrisa wektor-setiri bir sütünden durýan bolsa wektor-sütüni diýilýär.

Kwadrat matrisanyň bar dignal elementlerinden başga elementleriniň ählisi nola deň bolsa onda beýle matrisa degnal matrisa diýilýär.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11}\ o\ o...o \\ oa_{22}o...o \\ o\ o\ o...a_{nn} \end{pmatrix}$$

Degmal matrisanyň baş degmal elementleri 1-e deň bolsa onda bu matrisa birlik matrisa diýilýär.

Matrisalaryň üstünde dürli jynsly arfmetiki amallary ýagny goşmak, aýyrmak sany matrisa köpeltmek, matrisany matrisa köpeltemk, we wektory matrisa köpeltmegi ýerine ýetirmek örän amatlydyr.

Iki matrisanyň jemi ýagny, A = (a_{ij}, i = $\overline{1,n}$; j = $\overline{1-m}$) we

B = (b_{ij}, i = $\overline{1,n}$; j = $\overline{1,m}$) matrisalaryň jemi hem degişli a_{ij} we b_{ij} elementleriň jemine deň bolan elementlerden durýan matrisadyr.

C = (c_{ij}, i = $\overline{1,n}$; j = $\overline{1,m}$) ·

Mysal. A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ we B = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+4 & 5+0 & 1+8 \\ 7+1 & 3+6 & 9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

A matresany h sana ýa-da h sany A matrisa köpeldilmeginde C matrisa A matrisanyň her bir elementini h-a köpeldilip alynýar.

Ýagny, c = ha = (h_{ij}, i = $\overline{1,n}$; j = $\overline{1,m}$)

Mysal H = 2, matrisa A = $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

$$C = HA = \begin{pmatrix} 5\cdot2 & 1\cdot2 & 3\cdot2 \\ 6\cdot2 & 2\cdot2 & 8\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Iki matrisanyň tapawudyny c = a – b aşakdaky öwürmäni geçirmek arkaly tapmak has amatlydyr, ýagny d = (-1). b onda c = a + d. Has gysga
C = A + (-1)·B görnüşde ýazmak bolar.

Mysal $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ we $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} + (-1)\cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Iki matrisanyň köpeltmek hasabyny haçnda a matrisanyň sany beýleki b matrisanyň setiriniň sanyna deň bolanda tapmak bolar. Eger a - m · k bolanda
b - k · n degişlilikde ölçegleri bolanda onda c = a · b matrisanyň ölçegi m · k bolar we her bir elementini aşakdaky formula boýunça hasaplap bolar.

$$c_{ij} = a;\ _1b_{1j} + a_{j2}\, b_j + ... + a_{in}\, b_{kj} = \sum_{l=1}^{K} a_{il}\ \ b_{ej}$$

Başgaça aýdylanda a matrisanyň i-nji setiriniň elementlerini degişlilikde b matrisanyň j-nji sütüniniň elementlerine köpeldilýär we ähli alynan köpeltmek hasyllary bolsa goşulýar.

Mysal $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot7+5\cdot2+1\cdot3 & 2\cdot9+5\cdot1+1\cdot5 \\ 3\cdot7+9\cdot2+0\cdot3 & 3\cdot9+9\cdot1+0\cdot5 \\ 4\cdot7+7\cdot2+3\cdot3 & 4\cdot9+7\cdot1+3\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 28 \\ 39 & 36 \\ 51 & 58 \end{pmatrix}$$

Matrisany wektora we wektory matrisa köpeltmek.

m · n ölçegli a-matrisa, ölçegligi m y wektor setir, ölçeglilgi n x wektor-sütün, bolanda köpeltmek hasyly tapmaly. c = a · x we d = y·a ölçegliligi gabat gelmesi x ·a ýa-da a·y köpeltmek hasyly almak mümkin däldir.

Mysal a·x we a·y köpeltmek hasyly aşakdaky berlenlerde tapmaly.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 7 & 1\cdot 2 + 5\cdot 4 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 2 + 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = y\cdot a = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 3 \cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 4 \cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 29 \end{pmatrix}$$

Çyzykly deňlemeler ykdysady-matematiki modelirlemekde kärhanalarda önüm öndürlişini aňlatmakda giňden ýaýran formalaryň biridir. Eger a_i haýsy hem bolsa bir önümiň bir birligini.

Eger a_i i-görnüşli önümiň bir ölçeg birligini taýarlamaklykda haýsy hem bolsa bir resursdan kesgitli bir çykdaýjysynyň normasydygy belli bolsa we b-e bu resurda planlaşdyrylan arale bar bolan mukdary bolanda onda x_i önümi öndürmek üçin talap edilýän resursyň gatnaşygynabar bolan resursyň mukdary görnüşinde aşakdaky ýaly aňlatmak bolar.

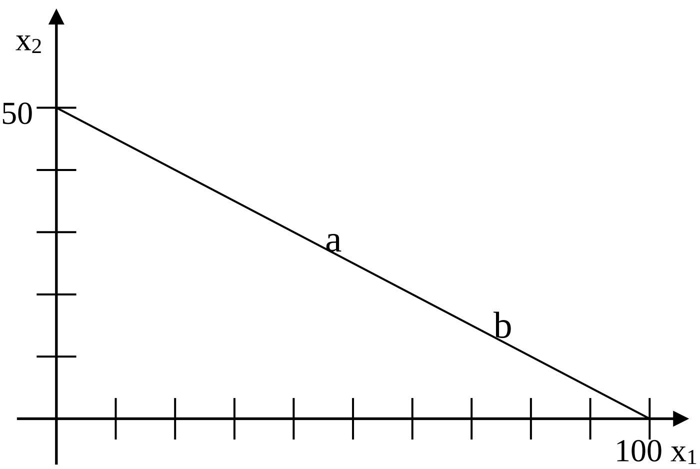
$a_1x_1+a_2 x_2 +a_3 x_3 +....+a_n x_n=b$ ýa-da $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = b$

Mysal. Goý kärhanada iki görnüşli önüm öndürilýär diýeliň muny öndürmek üçin bolsa 10 mm diýametrli prutok gidýär diýeliň. Ammarda 100 m prutok bar diýeliň. Birnji we ikinji görnüşli önümleri öndürmek bir ölçeg birligini öndürmekde degişlilikde 1-1m, we 2-2m normada çykdaýjy edilýär.

Onda talap edilýär we bar bolan resursyň arasyndaky baglanşygy aşakdaky deňligiň üsti bilen aňlatmak bolar.

$1\cdot x_1+2\cdot x_2=100$

Koordinatalar tekizliginde aşakdaky görnüşi alarys.



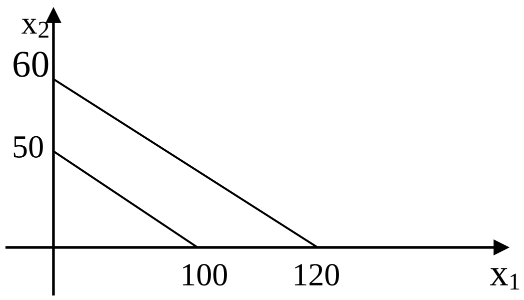
Mysal üçin a (50;25) ýagny x_1=50; x_2=25 önüm çykarmak programmasyna gabat gelýär. b (80;10) nokatda bolsa önüm öndürmegiň programmasy üýtgeýär.

Bu görnüşiň üstünde ýatýan nokatlaryň barsy hem deňlemäni kanagatlandyrýar şonuň üçin bu deňlemäni bar bolan we talap edilýän resursyň balans deňlemesi diýip hem atlandyrmak bolar.

Mysal. Eger $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 100$ deňlemä $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 120$ deňleme bilen doldypsak onda deňlemeler sistemasyny alarys. Onuň çözügi ýokdyr.

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 100 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 120 \end{cases}$$

Koordinatalar tekizlikde aşakdaky görnüşe eýe bolar.

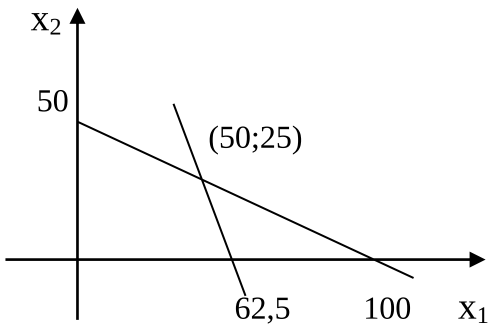


Mysal. Eger $1x_1 + 2 \cdot x_2 = 100$ deňlemä $2x_1 + 1 \cdot x_2 = 125$ deňlemäni doldypsak onda alnan sistema ýeke-täk çözüge eýedir.

$x_1 = 50$; $x_2 = 25$

$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 100$

$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 125$



2.Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesi we ony çözmegiň usullary .

§ 2.1. Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesiniň goýlyşy.

Çyzykly programmirleme käbir çyzykly çäklendirmelerde çyzykly funksiýanyň maksimum bahalarynyň toplumyny tapmagy kanagatlandyrýan kesgitli meseleler klasyny çözmegiň usullaryny we nazarýetini birleşdirýändir.

Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesini aşakdaky ýaly aňladylýar.

$c_1 x_1+c_2 x_2+...+ c_n x_n \rightarrow \max$
$a_{11} x_1+ a_{12} x_2+...+ a_{1n} x_n = b_1$
$a_{21} x_1+ a_{22} x_2+...+ a_{2n} x_n = b_2$
$a_{m1} x_1+ a_{m2} x_2+...+ a_{mn} x_n = b_m$
$x_j \geq o$, j= 1,2,...n

Çyzykly programmirlemegiň meselesi gysgaldylan görnüşde aşakdaky ýaly aňladylýar.

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \cdot x_j \rightarrow \max \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2...m$$

Bu ýerde X_j çyzykly progrommirlemegiň üýtgeýän ululygy.

a_{ij}, b_i, c_j-meseläniň hemişelilkleri.

Çyzykly progrommirlemegiň meselesiniň matemažtiki modeli üç düzüm bölek bilen tapawutlanýar: maksat funksiýa, çäklendirme sistemasy we otrisatel dälik şerti.

Käbir çäklendirme sistemasyny we otrisatel dälik şertini kanagatlandyrýan çözüwlere ýol bererlik çözümler diýilýär, ähli üç talaby hem kanagatlandyrýanlary optimal çözüw diýilýär.

Maksat funksiýasynyň c_{ij} koýefisentleri çyzykly programmirlemäniň ykdysady meselelerine önümiň bir birliginden peýdany, bahasyny çykdaýjy derejesini we beýlekileri aňlatmagy mümkindir. Meseläniň mazmuny üçin maksimuma ýa-da ony minimuma çözülýändigi wajypdyr.

Çyzykly progrommirlemegiň umumy meselesiniň çäklendirme sistemasyna deňleme goşulýandyr.

Haçanda n = m bolanda çäklendirme sistemasy ýeke-täk ýagny optimal çözüw diýip hasap edilýän çözüwe eýedir.(eger üýtgeýänleriň otrisatel dälik şerti ýerine ýetende).

Haçanda m < n bolan şertde sistema tükeniksiz köp çözüwe eýedir, ine şonda olaryň arasynda iň oňat çözüwi gözenekde ýörite çözmegiň usullarynyň zerurlygy ýüze çykýar.

Ykdysady meselelerde çyzykly progrommirlemegiň çäklendirmeleriniň sistemasy ilki başda deňsizlik görnüşe eýedir.

Mysal üçin a_{ij} bilen önümiň birligine edilýän resursyň çykdaýjysynyň normasyny, b_i ululyk bar bolan resursyň mukdary, deňsizlikleriň çäklendirmesi bar bolan resurslardan çykdaýjylaryň köp bolmazlygyny talap edýär. Şu jähitden çäklendirmeleri aşakdaky görnüşde ýazmak bolar.

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1k} x_k \leq b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2k} x_k \leq b_2$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k \leq b_m$

Çyzykly progrommirlemegiň umumy meselesiniň goýulşy we çözülşi üçin başdaky deňsizlikler-çäklendirmesini deňlemelere öwürmelidir. Munuň üçin her bir çäklendirmäniň çep bölegine otrisatel bolmadyk goşmaça üýtgeýän ululygy goşmak gerekdir.

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1k} x_k + x_{k+1} = b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2k} x_k + x_{k+2} = b_2$
- -
$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k + a_{km} = b_m$

Eger esasy üýtgeýänleriň toplumynda geňlik ýerine ýetýän bolsa onda goşmaça üýtgeýän ululyk nula deňdir. Garşylykly ýagdaýda çep bölege bir sag bölege deňleşýän şu san baha goşulýandyr.

Çyzykly progrommirlemegiň meselesinde goşmaça üýtgeýän doly kesgitli ykdysady mana eýedir. Şeýle hem eger meseläniň çäklendirmesinde bar bolan we çykdaýjy edilýän resurs aňladylýan bolsa onda goşmaça üýtgeýän optimal plan boýunça ulanylmadyk resursyň mukdaryny häsiýetlendirýändir.

Köplenç meseleleriň başlangyç çäklendirmeleri “uludyr deňdir” görnüşdäki deňsizliklere eýedir.

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1k} x_k \geq b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2k} x_k \geq b_2$
$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k \geq b_m$

Beýle görnüşli sistemalar çep böleginde otresatel bolmadyk goşmaça üýtgeýänleri aýyrmak ýoly bilen deňlemelere öwürilýär.

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1k} x_k - x_{km} = b_1$
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2k} x_k - x_{k+2} = b_2$
- -
$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k - x_{k+m} = b_m$

Görnüşi ýaly çyzykly programmirlemegiň meselesiniň çäklendirmesi ilki başda islendik görnüşde bolmagyna garamazdan ony (1) umumy görnüşe getirilýär. Üýtgeýänleri otresatel dälik şerti seredilýän ähli çyzykly programmirlemegiň meselesine degişlidir.

Ykdysasdy meseleler üçin bir şert öz manysy boýunça hem otresatel bahalara eýe bolmajagy görünip durandyr. Şunuň bilen birlikde otresatel dälik şerti matematiki gatnaşykda düýpli rol oýnaýandyr, şeýle hem ýol bererlik çözüwler köplügi üýtgeýänleri otresatel däl bahalarynyň ululyklaryny özünde jemlemelidir.

Çyzykly progrommirlemegiň umumy modeliniň matematiki aýratynlygynda ykdysady meseleleri goýmakda talaplaryň hatary gelip çykýar. Olar aşakdaky dört esasy şertlerden durýandyr.

1. Meselede planyň optimallyk kriteriýasy-netijelilik görkezijiniň mukdary kegitli formulirlenen bolmalydyr.
2. Real ykdysady hakykylykdaky ähli faktorlary meselede hasaba almak mümkinçiligi bolmalydyr.
3. Çyzykly programmirlemek köp sany ýol berjek programmalardan optimal programmany saýlamak üçin niýetlenendir, şonuň üçin hem ykdysady meseleleriň anyk şertlerinde wariantlarň erkin saýlanmagyna şertlenmelidir.
4. Çyzykly pogrammirlemegiň meselesi diňe çyzykly deňlemelerden we dwňsizliklerden durýan bolmalydyr.

Tema4: § 1.1. Çyzykly programmirlemegiň meselesiniň grafiki usulda çözülşi

Optimal meýilleşdirmäniň meselesini çözmegiň iň bir netijeli, çuňňur işlenip taýýarlanan we çuňňur amaly taýdan barlanan usullaryndan biri çyzykly programmirlemedir.

Çyzykly programmirlemegiň meselesiniň grafiki usulda çözülüşine has çuňňur düşünmek üçin anyk ýönekeýje mysalla seretmek has amatlydyr. Bu mysal ykdysady meselede optimum nähili goýulýar, şeýle hem, ol matematiki nähili formulirlenýär we çyzykly programmirlemegiň usullarynyň biri bolan grafiki usulda çözlüşine seretmekdir.

Onuň üçin aýdalyň kesgitli bir kärhanada esasy önümçiliginden daşary galyndy materiallardan önüm öndürýän bölüm gurnalan diýeliň.

Bu bölümde stollar we kitapça şkaflar, ýagny şol iki görnüşli önümler öndürilýär. Bu görnüşdäki önümleri islendik gatnaşykda öndürmek bolar, ýöne işçi ýerleriň sany we esasy ulanylmaly materiallar bölüminde çäklendirlen.

Bu ýerde goýulýan mesele şundan ybarat ýagny bölümiň aýlyk öndürmeli önümini iň uly peýda alar ýaly edip meýilleşdirmeli.

Meseläniň şertli san-bahalary aşakdaky tablisada berilýär.

Tablisa 1

Önümiň görnüşleri	Önümiň bir-birligine edilýän çykdaýjynyň normasy			Önümiň bir birliginden gelýän peýda (mil. man)
	Işli wagty (adam-sag)	Agaç (m^3)	Aýna (m^2)	
Stol	9,2	0,3	-	3
Şkaf	4,0	0,6	2,0	2
Bar bolan resurslaryň mukdary	520	24	40	-

Meselede ähli materiallary ulanmaly diýen şert goýulmaýar. Işçi wagty we materiallary mümkin boldugyça berlen çäkden ýokary çykmazdan doly ulanmaly.

Haýsy hem bolsa bir ýörite usuly ulanmazdan meýilnamany düzmäge synanşalyň.

Mysal üçin bir görnüşli önümler-stollar olaryň bir birligine köpräk peýda gelýär işçi wagty hem 56 stol ýasamaga ýeter $(\frac{520 \ adam-sag}{9{,}2 \ adam-sag})$, agaç serişdesi 80 stol $(\frac{24 \ m^3}{0{,}3 \ m^3})$. Bir görnüşdäki serişdäni ulanylmakda 56 stol ýasalar, ol jemi 168 mil. man. peýdany üpjün eder (56 stol x3 mil. man.)

Egerde programmany düzmeklik şkaf ýasamaklykdan başlansa onda çykarylmaly şkafyň sany 20-den artmaz sebäbi bar bolan aýna materialy diňe 20-i şkafa ýeterlikdir. Agaç bolsa 12 m^3 sarp ediler, galan 12 m^3 agaçdan bolsa 40 sany stol ýasamak bolar.

520 adam-sagadynyň 80 adam-sagadyny 20-şkaf ýasamaga sarp ediler. Galan 440 adam-sagat bolsa 48 stol ýasamaga ýeterlikdir.

Diýmek 2-nji programma boýunça 20 şkaf we 40 stol ýasamagy göz öňünde tutup boljak ýöne işçi wagtynyň belli bir bölegi ulanylman galýandyr. 2-nji programma boýunça 160 mil. manat peýda geljek ýagny,

(20 şkaf x 2 mil. man. + 40 stol x 3 mil. man)

Bu agzalan iki programmanyň ýeke-täk mümkin bolan programma däldigi aýdyňdyr.

Ýenede bulardan başga uly peýda getirjek programmalaryň wariantlarynyň bardygyny hem iňkär etmek bolmaz, ýöne häzirlikçe bize wariantlary barlamaklygyň ýönekeý barlaglaryndan başga usullar näbellidir.

- Soňky alnan usulyň ulanarlykly däldigi netijeleri deňeşdirlende aýdyň görünýär.
- Bu goýlan meseläni çözmek üçin çyzykly programmirlemegiň usullarynyň biri bolan grafiki usuly peýdalanalyň.
- Munuň üçin ilki bilen meseläniň şertini matematiki aňladalyň. Onuň üçin x_1 bilen stoluň gözlenilýän çykaryljak mukdaryny, x_2 bilen bolsa şkafyň çykarylmaly gözlenilýän sanyny bellesek.
- Onda işçi wagtyň we ulanylmaly materiallaryň bar bolan mukdary bilen baglanşykly çäklendirmeleri hem matematiki aňladyp aşakdakylar ýaly ýazmak bolar.
- Tablisada berlen maglumatlar esasanda işçi wagtyň summar çykdaýjysy

$9{,}2x_1 + 4x_2$ görnüşde ýazylyp programma girizilmelidir. Bu ululyk (520 sandan) köp bolup bilmez.

Şeýlelikde meseläniň bir şerti aşakdaky deňsizlige eýe bolar.

$9_12x_1 + 4x_2 \leq 520$

Edil şuňa meňzeşlikde agaç we aýna materiallaryň summar çykdaýjylaryny hem deňeşlilikde aşakdaky deňsizlikleriň kömegi bilen aňlatmak bolar.

$0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \leq 24$

$2x_2 \leq 40$

Meselede x_1 we x_2-niň mümkin bolan köp bahalaryndan $3x_1 + 2x_2$ ullulygy maksimuma eýe edibiljegini ýagny peýdanyň jemini iň köp bolar ýaly edibiljegini tapmaly.

- Şol maksat bilen hem goýulan ykdysady meseläniň matematiki formasy aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$9{,}2x_1 + 4x_2 \leq 520$

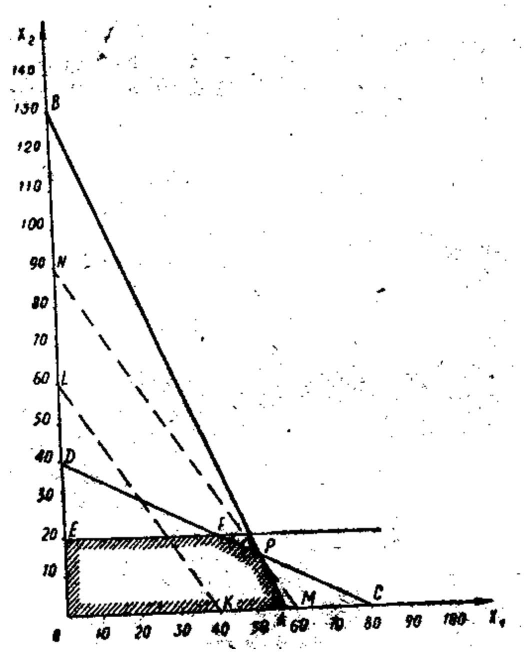
$0{,}3x1 + 0{,}6x_2 \leq 24$

$2x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Soňky setirdäki şert çykarylýan önümiň sanyny aňladylýanlygy sebäpli otrisatel dällik şertidir.

Seredýän mysalymyzyň şertini grafikda aňladalyň. Onuň üçin göniburçly koordinatalar sistemasynyň gorizontal okuny x_1 we wertikal okuny bolsa x_2 bilen aňladalyň.



Meseläniň şertlerindäki deňsizlikleriň deňlemeleriniň aňladýan gönülerini koordinatalar sistemasynda iki nokadyň üstünden ýeke-täk bir göni geçirip bolýar diýen aksiomadan ugur alyp, olaryň her bir ok bilen kesişýän nokatlaryny kesgitläp bu nokatlaryň üstünden gönini geçirmek arkaly aňladyp, bu ýarym tekizlikleri çäklendirýän gönüleriniň kesişmesinde meseläniň ýol bererlikli çözüwleriniň köplügini çäklendirýän OAPFE bäşburçlygy alarys.

Meseläniň şerti boýunça bu mümkin bolan çözüwleriň köplüginiň içinden $3x_1 + 2x_2$ ululygy maksimuma üpjün edýänini saýlamaly.

Onuň üçin goý $3x_1 + 2x_2 = 120$ diýip erkin kabul edeliň we onuň degişli gönüsini geçireliň, ol göni koordinatlar oklaryny degişlilikde $x_1 = 40$ we $x_2 = 60$ nokatlarda kesip geçer we KL gönininiň üstünde ýatan nokatlar peýdanyň 120 mil. manada deň boljak programmasyny kanagatlandyrýan nokatlar boljogy düşnüklidir.

Bu maksimal peýda däldir.

Ýöne KL gönüni öz-özüne parallel ugur boýunça süşürenmizde haçan hem bolsa MN göni bilen baglanşar we P nokatda bäşburçlyk bilen umumy bir nokada eýe bolar. Bu bolsa P nokadyň real çäklerde önümleri maksimal peýdada çykarmagyň programmasyna gabat gelýändigine şaýatlyk edýändir.

Indi bolsa P nokadyň koordinatlaryny tapaýmak galýar.

Onuň üçin hem gönüleriň deňlemelerinden düzülen sistemany çözmek ýeňerlikdir.

$9{,}2x_1 + 4x_2 = 520$
$0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 = 24$

Sistemany çözüp alarys.
$x_1 = 50; x_2 = 15$

Şeýlelikde optimal programma boýunça 50 stol we 15 şkaf çykarmak bilen iň uly peýdany alyp boljakdygy gelip çykýar. Munuň beýledigine göz ýetirmek kyn däldir.
180 mil. manat = (50 stol x 3 mil. man. + 15 şkaf x 2 mln. man.)

§ 2.2. Çyzykly progromirlemegiň meselesini çözmegiň simpleks usuly.

Çyzykly programirlemegiň giňden ýaýran usullarynyň biri hem plany yzygiderli gowlandyrmak usuly (simpleks usuly). Bu usul çyzykly progromirlemegiň islendik meselesini bir plandan beýleki plana geçmek ýoly bilen çözmäge mümkinçilik döredýändir.

Bu usulda her geçişde maksat funksiýanyň bahasy belli bir ululykda ulalyp maksimuma ymtylýar. Ahyrky optimal plan soňky geçişde alynýar. Plany yzygiderli gowlandyrmak usuly aşakdaky anyk mysalyň üsti bilen düşindireliň

$$L = (x) = 2x_1 + x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$5x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$$

Goşmaça üýtgeýän ululyk girizip alars.

$L(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$

$5x_1 + x_2 + x_4 = 5$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;$

Bu ýerden

$x_3 = 8 - 2x_1 - 4x_2$

$x_4 = 5 - 5x_1 - x_2$

Başlangyç ýagdaýda $x_1 = x_2 = 0$ bolsa onda ilkinji daýanç plany alars.

$X_3 = 8,\ x_4 = 5$

$x = \{x_1 = x_2 = 0\ x_3 = 8\ x_4 = 5\}$

Eger, $x_2 = 0$ bolan ýagdaýynda alarys.

$x_3 = 8 - 2x_1$

$x_4 = 5 - 5x_1$

Ýagny x_1 ulaldygyça x_3 we x_4 bazis üýtgeýä kemelýär.

$x_1 = 1$ bolanda x_4 nula öwrülýär. emma $x_4 = 4$ bolanda x_3 nula öwürýän $0 \leq x_1 \leq 1$ bolanda bazisini üýtgeýän polotel bolup golýine soňraky x_1 – iň ulanmagynda x_4 otrisatel bolýar. Bu bolsa meseläniň şertini bozýar.

Şonuň üçin $x_1 = 1\ x_4 = 0$ we x_i bazisini x_4 bolsa bazisni däl bolyp çykýar. Onda $5x_1 = 1 - x_2 - x_4$ bu ýerde $x_1 = 1 - 1/5\ x_2 - 1/5\ x_4$

Bu tapylan aňlatmany täze bazis üýtgeýäde ýokarky deňlemede gaýup alarys

$x_3 = 8 - 2/5\ x_2 + 2/5\ x_4 - 2 - 4\ x_2 = 6 - 18/5\ x_2 + 2/5\ x_4$

$L(x) = 2x_1 \geq + x_2 = 2 - 2/5\ x_2 - 2/5\ x_4 + x_2 = 2 + 3/5\ x_2 - 3/5\ x_4$

Şeýle hem öwürme geçirlenden soň mesele aşakdaky görnüşi alar.

$$\begin{aligned} &x_3 = 6 - 18/5\ x_2 + 2/5\ x_4 \\ &x_1 = 1 - 1/5\ x_2 - 1/5\ x_4 \qquad (2) \\ &L = (x) = 2 + 3/5\ x_2 - 2/5\ x_4 \end{aligned}$$

(2) – den täze daýanç plan kesgitlenýär nula deň bolsun $x_2 = 0\ x_4 = 0$

Täze daýanç plan üçin

$x = \{ x_{1=1};\ x_2 = 0;\ x_3 = 6;\ x_4 = 0 \}$

maksat funksiýa $L(x) = 2$

Şeýlelik bilen şu öwirmeden soň $x^{(0)}$ – da $x^{(1)}$ maksat funksiýa 2 ululyk ulaldy.

– x – üýtgeýän ululygyň ulalmagy bilen x_4 – bazisni ululyk nula öwrülýär. Onda bazis üýtgeýänler

$x_3 = 6 - 18/5\ x_2;\ x_1 = 1 - 1/5\ x_2$ formula boýunça üýtgeýändir.

x_2 üýtgeýän haýsy hem bolsa bir bazis üýtgeýän nula öwrülýänçe ulalýandyr.

$x_2 = 5$ bolanda x_1 nula deň bolar emma $x_2 = 5/3$ bolanda x_3 nula öwüriler.

$x_2 = 5/3$ boýunça ulalyp biler $x_2 > 5/3$ bolanda x_3 – otrisatel baha alar. Bu bolsa meseläniň şertine garşy gelýär. Şeýlelikde x_3 bazis däl x_2 bolsa bazis üýtgeýändir.

(2) – den alarys

$18/5\ x_2 = 6 - x_3 + 2/5\ x_4$ bu ýerde

$x_2 = 5/3 - 5/18\ x_3 + 1/9\ x_4$

tapylan aňlatmany (2) – den ýerine goýup alarys.

$x_1 = 2/3 + 1/18\ x_3 - 2/9\ x_4$

$L\ (x) = 3 - 1/6\ x_3 - 1/3\ x_4$

Şeýlelikde mesele aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$x_2 = 5/3 - 5/18\ x_3 + 1/9\ x_4$$
$$x_1 = 2/3 + 1/18\ x_3 - 2/9\ x_4$$
$$L\ (x) = 3 - 1/6\ x_3 - 1/3\ x_4$$

x_3 we x_4 bazis däl üýtgeýän diýip kabul edeliň onda täze daýanç planyny alarys.

$x^{(2)}\ \{ x_1^{(2)} = 2/3;\ x_2^{(2)} = 5/3;\ x_3^{(2)} = 0;\ x_4^{(0)} = 0 \}$

$L\ (x^{(2)}) = 3$

Maksat funksiýasy üçin bazis däl üýgeýänleriň oyrisatel koefisiýentleri ýokdyr we x_3, x_4 – i hiç – hili üýtgedip bolmaýar $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$;

Şeýlelikde maksat funksiýanyň iň uly (maksimum) bahasy 3 – e deňdir.

§ 2.3. Simpleks tablisalar we olaryň düzilişi.

Öňki paragyrfymyzda görnüşi ýaly plany yzygiderli gowylaşdyrma usulynda geçirilýän öwürmeler deňlemäniň özüniň dälde ondaky bazis we bazis däl üýtgeýänleriň koefisientleriň üstinde geçirilyar, onda olary tablisa görnüşine getirmek bolar. Tablisanyň başky setiri bolsa maksat funksiýadan durar.

Öňki paragyrfda sereden mysalymyza ýüzlensek onda aşaksaky görnüşi alarys

$$L\ (x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow (\max)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4\ x_2 + x_3 = 8 \\ 5\ x_1 + 4\ x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Maksat funksiýany aşakdaka ekwiwalent görnüşde ýazarys.

$L\ (x) - 2\ x_1 - x_2 = 0$

Çäklendirmeleriň deňlemelerini bolsa aşakdaky ýaly ýazarys.

$x_3 + 2\ x_1 + 4\ x_2 = 8$

$x_4 + 5\ x_1 + x_2 = 5$

Başdaky tablisany aşakdaky görnüşde düzeris .

tablisa 1

bazis üýtgeýän	azat çlenler	dolandyryş parametrleri				0
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	8	2	4	1	0	8/2
x_4	5	5	1	0	1	5/5
L (x)	0	– 2	– 1	0	0	–

Tablisa 1 – dan tablisa 2 – ä geçmek üçin aşakdakylar ýerine ýetirilmeli. Ilki bilen tablisanyň iň soňky setirindäki x_1; x_2; x_3; x_4 üýtgeýänleriň otrisatel koefisientleriň absolýut ululygy boýunça iň ulusyny kesgitlemeli biziň ýagdaýymyzda ol – 2-ä deňdir we x_1 sütinde ýerleşendir. Bu sütine bolsa (ведущим) urukdyryjy sütin diýilýär. Bu urukdyryjy sütün bazis üýtgeýän däldir ýöne itarasiýanyň dowamynda ulalýar we bazis üýtgeýän beýleki bazis üýtgeýänleriň biri nula öwrülýänçä ulalýandyr.

x_1 – yň haýsy bahasynda x_3 we x_4 bazis üýtgeýänleri haýsy hem bolsa biriniň nula öwüriljegini kesgitlemeli. Onuň üçin hem azat çilenleri urukdyryjy sütiniň polotel koefisentlerine bölüp olaryň içinden iň kiçisini almaly. Biziň şertimizde (8-*i*, 2-a we 5-*i*, 5-e bölmeç) bu gatnşyklar boýunça bizi kanagatlandyrýany (5/5=1) bu bolsa (x_4) üýtgeýäniň bazis däldigini kesgitleýär. Bu setire bolsa urukdyryjy setir diýilýär. Kesişmedäki elemente bolsa urukdyryjy element diýilýär. Şeýlelikde x_3 we x_1 üýtgeýänler bazisni barlar. Bu ýagdaýdan soňra tablisa 2-geçmek bolar

tablisa 2

bazis üýtgeýän	azat çlenler	x_1	x_2	x_3	x_4	0
x_3	6	0	18/5	1	– 2/5	5/3
x_1	1	1	1/5	0	1/5	5
L (x)	2	0	– 3/5	0	2/5	–

Tabilisa 1- den tablisa 2-ä geçende x_3 we x_1 bazis üýtgände ýazarys. x_4 bazis däl bolar we nula deňlener Şeýle hem urukdyryjy setiri urukdyryjy (5-e) elemente bölip ýazarys galan elementlerini hem düzgin boýunça dolduryp alarys.

Tablisa – 2 den tablisa 3-e geçeris tablisa – 2-iň iň soňky setirinde ýeke-täk otrisatel san (– 3/5) bardyr ol hem x_2 sütinde onda urukdyryjy elementiň (6:18/5 = 5/3; 1:1/5=5) bu gatnaşyklardan minimalnysy (5/3) çarkyndaky 18/5 element urukdyryjy element bolar. tablisa 3-de bazis elementler x_2 we x_1 bolar.

tablisa 3

bazis üýtgeýän	azat çlenler	x_1	x_2	X_3	x_4
x_2	5/3	0	1	5/18	– 1/9
x_1	2/3	1	0	– 1/18	2/9
L (x)	3	0	0	1/6	1/3

Sonky 3-nji tablisa optimalygyň sertini doly kanagatlandyryar onda optimal plan boýunça maksat funksiýanyň bahasy L ($x^{(2)}$) = 3 deň bolar.

§2.4. Ilkinji bazisi gözlemek.

Bilşimiz ýaly çyzykly programirlemegiň meselesini simplens-usulda çözülende. Ilki bilen çäklendirmäniň sistemasyny aşakdaky görnüşe getirmek talap edýärdik.

$x_1 = b_1 - (a_{1,r+1}\, x_{r+1} + \ldots + a_{rn}\, x_n)$

……………………………………………

$x_r = b_r - (a_{r,r+1}\, x_{r+1} + \ldots + a_{rn}\, x_n)$

Bu ýerde, $b \geq 0$, $br \geq 0$.

Bu şertde biz $x_1, \ldots x_r$ bazis üýtgeýänleri düzýär diýip hasap edýärdik. Çyzykly progremirlemegiň köp meselelerinde beýle αýagdaý erine ýetýändir. Başga ýagdaýlarda ony gözlemäge degişlidir.

Bazisi tapmagyň usullarynyň biri bolan emeli bazis usulyna seredeliň.

Goý çäklendirmäniň sistemasy umumy görnüşde berlen bolsun

$$\alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{,n} x_n = \beta_1 \qquad (1)$$

- - - - - - - - - - - - -

$$\alpha_{r1} x_1 + \ldots + \alpha_{rn} x_n = \beta_r$$

$\beta_1 \ldots \beta_r$ sanlar ptrisatel däl diýip hasap edilýär eger beýle bolmasa onda deňlemäniň iki tarapyny hem-1-a köpeldip alarys. $\beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_r \geq 0$

$y_1, \ldots y_r$ emeli näbelileri girizip alarys.

$$y_1 = \beta_1 - (\alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n)$$

………………………….. (2)

$$y_r = \beta_r - (\alpha_{r1} x_1 + \ldots + \alpha_{rn} x_n)$$

(1)we(2) sistemalaryň çözmeleri özara ekwiwolentdir. (2) sistemadaky $y_1, \ldots y_r$ emeli näbelliler bazis üýtgeýäni aňladýandyr.

Bu bazis üýtgeýänden käbir ööwürmelerden soňra beýleki bir bazis üýtgeýänleri alarys.

$x_1 = b_1 - (a_{1,r+1} x_{r+1} \ldots + a_{1n} x_n + a'_{11} y_1 + \ldots + a'_{1r} y_r)$;

……………………………………………… (3)

$x_r = b_r - (a_{r,r+1} x_{r+1} \ldots + a_{rn} x_n + a'_{r1} y_1 + \ldots + a'_{rr} y_r)$;

Bu ýerde $b_1 \geq 0 \ldots, b_r \geq 0$. $y_1, \ldots y_r$-nula deň diýip alarys.

$x_1 = b_1 - (a_{1,r+1} x_{r+1} + \ldots + a_{1n} x_n)$;

……………………………… (4)

$x_r = b_r - (a_{r,r+1} x_{r+1} + \ldots + a_{rn} x_n)$;

(4) Sistema ilkinji (1) sistema bilen deňgüýçlidir. Ýöne (4)-däki $x_1, ..., x_r$ Näbeliler bazis üýtgeýänlerdir şeýle hem meseläniň bazis çözüwi gelip çykýar.

Indi (2)-den (3) –niň nädip gelip çykýandygyny çözmeklik galýar. Baýle maksat üçin simpleks usulyň kömegi bilen $F = y_1+...+y_m$ funksiýanyň (2)-niň we onuň bilen bilelikde $x_1 \geq 0,..., x_n \geq 0, ...y_r \geq 0$ şertleri Kanagatlandyrylýan minimum bahasyny tapmagy çözmelidir. Birnäçe iterasiýadan soňra gözlenilýän minimum bahany taparys.

Şeýlelikde $f \geq 0$ we min $f \geq 0$.

Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin

1. min $f \geq 0$. Bu (2)-sistemany otresatel çözigi ýok diýildigidir. Onuň üçin $y_1=0, ... y_r=0$ mundan (1)-sistemanyň hem otrisatel çözüginiň ýokdygy gelip çykýar.
2. min F =0. Soňky simpleks-tablisadan optimal çözüwi alarys

   $(x^0_1,..., x^0_n, y^0_1...y^0_r)$

   Şeýle hem $y^0_1+ ...y^0_2$=min f=0 onda $y^0_1=0, ..., y^0_r=0$

   Bu ýerde $(x^0_1 ... x^0_n)$- çözüwler (1) sistemany otrisatel bolmadyk çözüwleridir.

   Şeýlelikde min F=0 ýagdaýda (1) sistemanyň iň bolmanda bir otrisatel bolmadyk çözüwi bardyr.

   Ilkinji bazisi gözlemäge aşakdaky mysalda seredeliň.

$$3x_1-5x_2+x_3+2x_4=1$$
$$2x_1-2x_2+x_4-x_5=-4$$
$$x_1-3x_2+2x_4-x_5=-5$$
$$l(x)=x_1+2x_2$$

Berlen sistemanyň otrisatel bolmadyk çözüwleriniň içinden l(x) funksiýanyň minimuma öwürýän çözüwi tapmaly.

x_3-i Şol alamaty bilen bazis näblli diýip kabul edip. Galan deňlemede bolsa $y_1$we y_2 emeli näbelileri girizip netijede alarys.

$$x_3= 1-(3x_1-5x_2+2x_4)$$
$$y_1= 4-(-2x_1+2x_2-x_4+x_5)$$
$$y_2= 5-(-x+3x_2-2x_4+x_5)$$

Simpleks isulyň kömegi bilen kömekçi funksiýany minimizirleýiş.

$F= y_1+ y2_1=9-(-3x_1+5x_2-3x_4+2x_5)$

Sistemany we funksiýany simpleks-tablisa düzmäge amatly ýagdaýda ýazarys.

$x_3+(3x_1-5x_2+2x_4)=1$
$y_1+(-2x_1+2x_2-x_4+x_5)=4$
$y_2+(-x+3x_2-2x_4+x_5)=5$
$f+(-3x_1+5x_2-3x_4+2x_5)=9$
$l(x)-x_1+2x_2=0$

Birinji simpleks-tablisa aşaky görnüşe eýe bolar.

Tablisa 1

Bazis näbeliler	Erkin çlen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Ö
x_3	1	3	-5	1	2	0	0	0	
y_1	4	-2	2	0	-1	1	1	0	4/1
y_2	5	-1	3	0	-2	1	0	1	5/1
f	9	-3	5	0	-3	2	0	0	
L(x)	0	-1	-2	0	0	0	0	0	

Degişli öwürmden soňra tablisa 2-nji düzeris bu öwürmede y_1 bazis näbelileriň hataryna geçýär.

Tablisa 2

Bazis näbeliler	Erkin çlen	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_2	Ö
x_3	1	3	-5	1	2	0	0	
x_5	4	-2	2	0	-1	1	0	4/2
y_2	1	1	1	0	-1	0	1	1/1
f	1	1	1	0	-1	0	1	
L(x)	0	-1	-2	0	0	0	0	

y_2 setir bilen x_2 sütiniň kesişmesindäki element ugrukdyryjy elementi edilip saýlanandan soňra emeli näbelileriň ikisi hem bazis elementlikden çykdy. Bu görkezme min f=0 bolanlygyna şaýatlyk edýär. Şunuň bilen baglanyşyklylykda y_2 sütini we f setiri düşirip galdyrylýar. Indiki tablisa geçeris.

Tablisa 3

Bazis näbeliler	Erkin çlen	x_1	x_2	x_3	x_4	X_5	Ö
x_3	6	8	0	1	-3	0	3/4
x_5	2	-4	0	0	1	1	
x_2	1	1	1	0	-1	0	1
L(x)	2	1	0	0	-2	0	

Şeýlelikde tablisa 3-de x_3, x_5, x_2 bazis näbeliler diýip belelendir. Tablisa 3-e edil 1-nji simpleks-tablisa ýaly seretmek bolar. Edil ýokarky tablisalaryň düzülşinden ugr alyp tablisa 4-i düzeris.

Tablisa 4

Bazis näbeliler	Erkin çlenler	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6/8	1	0	1/8	-3/8	0
x_5	5	0	0	1/2	-1/2	1
x_2	2/8	0	1	-1/8	-5/8	0
L(x)	10/8	0	0	-1/8	-13/8	0

Tablisa 4-den görnüşi ýaly L(x) minimum baha eýe boldy.

$$L(x)min=10/8$$

Haçanda x={ x_1=6/8; x_2=2/8; x_3=0; x_4=0; x_5=5}

§ 2.5. Optimal planlaryň iň amatlysyny tapmakda simpleks usuly

Simpleks usulyň umumy ideýasyna düşünmek maksady bilen çyzykly programmirlemegiň meselesiniň grafiki usulynda ulanan meselämize gaýdyp geleliň. Bu mesele çözülende ilki başda OAPFE bäş burçlyk kesgitlenen, ýagny ýol bererlik bahalaryň köplügini kesgitleýär. Şeýle hem ol bäş burçlygyň P depesinde optimal planyň ýerine ýetýänligi kesgitlenendir. Bu ýerdäki stoldan we şkafdan gelýän peýdanyň görnüşi KL we NM gönüler başgaça ýapgytlarda hem bolup biler. Koordinatalar başlangyjyndan has daşlykda P nokatdan geçmän F nokatdan ýagny FP kesim bilen ýa-da PA kesim bilen gabat gelmegi hem mümkindir. Eger maksat funksiýa köpburçlyk bilen bir nokotda kesişse onda mesele ýeke-täk optimal plana eýedir. Egerde maksat funksiýasynyň gönüsi köpburçlygyň bir tarapy bilen gabatlaşsa onda mesele optimal planlaryň köplügine eýedir.

Grafiki usul görnükli we ýönekeý ýöne ony diňe iki esasy üýtgeýän ululykly meseleler çözülende ulanmak amatlydyr.

Üç esasy üýtgeýän ululykly meseleleriň ýol bererlikli çözüwlerini giňişlik sistemalar koordinatynda ýerleşýän köpguralygy gurmaly bolar. Şeýlelikde çyzykly programmirlemegiň çözüwini tapmak üçin ýol bererlikli çözüwleriň köpguralygynyň depelerine degişli planlary ýygnamaga ýeterliklidir. (iki üýtgeýänli ýagdaýda köpburçlygyň depelerinde). Beýle planlara daýanç planlary diýilýär. Käbir çylşyrymly meselelerde depeleriň sany çakdan köp bolanda daýanç planlara gelmeklik uly göwrümli hasaplama talap edýär.

Simplens usuly köpgurallygyň depelerini tertipleşdirip saýlamaga mümkinçilik döredýändir.

Depeleriň içinden birini kesgitlemekden soňra bu usul tapylan planyň optimallygyny anyklamaga kömek edýändir. Ýagny maksat funksiýa şol depede maksimuma eýe bolýanlygyny anyklanýar. Eger plan optimal bolmasa onda maksat funksiýasynyň özünden uly ýoda oňa iň bolmanda deň bahaly köpgramlygyň beýleki bir goňşy depesindäki maksat funksiýasynyň bahasyny ulanýar. Bu prosessi yzygiderli ýerine ýetirmek bilen haçan hem bolsa bir ýagdaýda optimal planyň ýerine ýetýän degişli depesini tapylar.

Simplens usul boýunça hasaplamalaryň yzygiderligine anyk alynan mysalda seredeliň.

Kärhanada esasy enjamlaryň üç topary ýerleşýär we A,B,W,G dört görnüşli detal çykarylýar.

Çykarylmaly detallaryň görnüşleri we olaryň sany çäklendirilmeýär. Erkin ýagdaýda planlaşdyrmak mümkinçiligi kärhanada bardyr. Şeýle hem çig mal çäklendirmesi ýokdyr.

Bu ýerde diňe esasy enjamlaryň işçi wagty berilen fondan ýokary çykyp bilýän däldir.

Mesele aşakdaky ýaly goýulýar.

Bir detaldan gelýän peýdany göz öňüne tutmak bilen kärhananyň summar peýdasy iň pes bolar ýaly edip önümçiligini planlaşdyrmaly.

Meseläniň şertli san bahalary aşakdaky tablisada berilýär.

Enjamlar toparlary	Detalyň bir-birligine sarp edýän wagty minutda				Aýlyk wagty fondy (minutda)
	A detal	B oktol	W detal	C detal	
I topar	1	2	4	8	24000
II topar	3	5	1	0	12000
III topar	6	0	3	1	30000
Detalyň bir-birliginden gelýän peýda (müň man)	0,4	0,2	0,5	0,8	-

Meseläniň şertini matematiki formalirläliň. Onuň üçin A,B,W,C görnüşli detallaryň gözlenýän çykarylmaly sanlaryny degişlilikde x_1, x_2, x_3, x_4 bilen beläliň.

Onda meseläniň matematiki modeli aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$0,4x_1+ 0,2\, x_2+ 0,5\, x_3+ 0,8\, x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1+ 2x_2+ 4x_3+ 8x_4 \leq 24000$$

$$3x_1+ 5x_2+ x_3 \leq 12000$$

$$6x_1+ 3x_2+ x_4 \leq 30000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

Meseläni simplens usulda çözmäge başlamazdan ilki bilen berlen deňsizlikleri deňlemä öwürmelidir. Onuň üçin meselä üç sany otresatel bolmadyk goömaça üýtgeýän ululyk x_5, x_6, we x_7 girizmelidir. Bulary çäklendirmäniň çep bölegine goşyp deňsizlikleriň ýerine deňlemeler alarys.

$$x_1+ 2x_2+ 4x_3+ 8x_4 + x_5 = 24000$$

$$3x_1+ 5x_2+ x_3 + x_6 = 12000$$

$$6x_1+ 3x_2+ x_4 + x_7 = 30000$$

Goşmaça üýtgeýän ululyklar tkdysady many tarapdan planda degişlilikde toparlarda ulanylman galan işçi wagytlary aňladýandyr.

Meseläni simpleks usulda çözmek üçin ýörite simpleks tablisa düzeris

Tablisa 2

Serişdeler we önmler	Bazis	C	Plan	0,4	0,2	0,5	0,8	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
I topar enjamlar	x_5	0	24000	1	2	4	8	1	0	0
II topar enjamlar	x_6	0	12000	3	5	1	0	0	1	0
III topar enjamlar	x_7	0	30000	6	0	3	1	0	0	1
	$j_j - c_j$		0	-0,7	-0,2	-0,5	-0,8	0	0	0
G detal	$\rightarrow x_4$	0,8	3000	1/8	1/4	1/2	1	1/8	0	0
II topar enjamlar	x_6	0	1200	3	5	1	0	0	1	0
III topar enjamlar	x_7	0	24000	47/8	-1/4	5/2	0	-1/8	0	1
	z_j-c_j		24000	-0,3	0	-0,1	0	0,1	0	0
G detal	x_4	0,8	2500	0	1/24	11/24	1	1/8	-1/24	0
A detal	$\rightarrow x_1$	0,4	4000	1	5/3	1/3	0	0	1/3	0
III topar enjamlar	x_7	0	3500	0	-241/24	13/24	0	-1/8	-47/24	1
	z_j-c_j		3600	0	0,5	0	0	0,1	0,1	0

z_j-c_j setiri doldyrmakda öz boluşly aýratynlyk bardyr. j-nji sütün üçin z ululyk c sütnüň ululygyny degişli j sütüniň koýefisentine köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir. Şonuň üçin hem biziň başlangyç planymyzda c sütüniň diňe nuldan durýanlygy sebäpli z_j ähli üýtgeýänlerde hem nul baha eýe bolýandyr we egişlilikde z_j-c_j =- cj. Şonuň üçin hem z_j-c_j setirde başlangyç wariantyň maksat funksiýasynyň koýefisentleri teris alamatlary bilen goýylandyr.

Görnüşi ýaly ilki başdaky düzilen plan boýunça hiç bir hili detal çykarylmaýar ýagny x_1= 0, x_2= 0, x_3= 0, x_4= 0, x_5= 24000, x_6=12000 , x_7= 30000, beýle ýagdaýda maksat funksiýasynyň bahasy hem nula deňdir.

Bu ýerde meseläniň maksimum peýda çözülýänligi sebäpli detallaryň bir birliginiň iň köp peýda getirýänini bazis elemente öwürmekden başlamak maksada laýyk diýip hasap etmek bolar. Başgaça aýdylanda indiki tapgyrda x_4 (G detal) üýtgeýän bazise girer.

Bu ýerde x_4 sütün bilen x_5 setiriň kesişmesindäki 8 sana baş element diýip atlandyrylýar.

Simpleks tablisanyň täze tapgyrynda x_5 setire derek x_4 bilen çalşylarda şol setiriň her bir elementini baş elemente ýagny bu ýagdaýda 8-e bölek arkaly x_4 setirdoldurylýar. Enjamlaryň II-toparynda G detal işlenip taýarlanmaýanlygy sebäpli bu setiriň elementleri wagytlaýynça üýtgemeýän öňküligine galýandyr.

Degişlilikde enjamlaryň III-toparynda ulanylmadyk işçi wagtyň fondy aşakdakydan düziler. 30000 min. -3000 sany x 1 min = 27000 min.
Bu ýerde x_7 =27000 min bolar.

Indiki (3) wariantda geljek baş elementi kesgitlemeli bolarys onuň üçin aşakdaky gatnaşyklaryň iň kiçisini kesgitleýän elementiň haýsy setir we sütünleriň kesişmesidigini anyklamak ýeterlikdir.

$$\frac{3000}{1/8}=24000;\frac{12000}{3}=4000;\frac{27000}{47/8}=4600$$

Gözlenýän baş element diýmek x_6 setire bilen x_1 sütüniň kesişmesi bolup çykýar. Planyň täze wariantynda peýda aşakdaky ýaly düzüler. 2500 G detal birligi x 0,8 müň manat +400 A detal birligi x
x 0,4 müň manat = 3600 müň manat.

Diýmek soňky alan planymyz optimal plandyr bu ýerde optimallyk şerti doly ýerine ýetirýändir ýagny z_j-c_j setir diňe nullardan we položitel elementlerden durýandyr.

Optimal planda görnüşi ýaly A detaldan aýda 4000 we G detaldan 2500 sanysy öndürmeli. Diýmek enjamlaryň I we II toparlarynda ähli işçi wagty ulanyljak, ýöne III toparda 3500 min ulanylman galjak (x_7 = 3500).

Şeýle hem optimal plan boýunça iki görnüşli detal çykarmak amatly bolup çykdy olardan gelýän jemi peýda 3600 müň manatdyr.

§ 2.6. Umumylaşdyrylan simpleks usuly.

Simpleks usuly boýunça optimal plany hasaplama prosessine umumylaşdyrylan häsiýetnama bereliň.

Mesele aşakdaky görnüşde berilipdir diýip göz öňünde tutalyň.

$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_k x_k + c_{k+1} + x_{k+1} + c_{k+2} x_{k+2} + ... + c_{k+m} x_{k+m} \rightarrow \max$

$a_{21} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1k} x_k + x_{k+1} = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2k} x_k + x_{k+2} = b_2$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k + x_{k+m} = b_m$

$x_j \geq 0;\ j=1,2,...k,\ k+1,...\ k+m$

Meseläniň beýle goýulşynyň özbolşly aýratynlygy başdaky deňlemeleriň m üýtgeýän ululyklarynyň (x_{k+1}, x_{k+2},..., x_{k+m}) koýefisentleri m tertipli birlik matrisany emele getirýändir.

Beýle görnüşli deňlemeler sistemasyny başda “≤, kiçidir deňdir” görnüşli deňsizlikleriň çäklendirmelerinden alynýar.

Agzalan hýsiýetli çäklendirme meseläniň umumy koýefisentleriniň düzülen matrisada m tertipli birlik matrisanyň bolmagy zerur şert dälde ol ýeterlikdir.

Maksat funkiýasynda käbir üýygeýäni islendik koýefisent bilen (položitel, otresatel, nolukly) umumy meseläniň goýulşynda aňladylyp biliner.

Meseläniň başlangyç daýanç plany hököminde aşakdaky görnüşdäki plan ulanylýar.

$x_1 = 0;\ x_2 = 0;...,\ x_k = 0;\ x_{k+1} = b_1;\ x_{k+2} = b_2;...,\ x_{k+m} = bm$

Ýokardaky berlen meseläniň berilenlerinden durýan planyň matrisasyny aşakdaky tablisadaky ýaly hödürlemek bolar.

Aşakdaky daýanç planyň matrisasy.

Tablisa

Setir	Bazis	c	Plan	c_1	c_2	...	c_j	...	c_k	c_{k+1}	c_{k+2}	...	c_{k+i}	...	c_{k+m}
				x_1	x_2	...	x_j	...	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	...	x_{k+i}	...	x_{k+m}
1	x_k+1	c_{k+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_m	1	0	...	0	...	0
2	x_k+2	c_{k+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2k}	0	1	...	0	...	0
.....	....	....	......	.....	.....	...	....	...	...	...	...	...		...	
I	c_k+i	c_{k+i}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{ik}	0	0	...	1	...	0
.....	....	......	......	.....	....	...	....	...	...	...	...	...		...	
m	x_k+m	c_{k+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mk}	0	0	...	0	...	1
m+1	....	....	z_o	z_1-c_1	z_2-c_2	...	z_j-c_j	...	z_k-c_k	0	0	...	0	...	0

Hususy ýagdaýda haçanda x_{k+1}, x_{k+2},... x_{k+m} üýtgeýänler maksat funksiýasyna nul koýefisentli girende alarys.

$z_j = o$ we $z_j - c_j = -c_j;\ j=1,2\ ...\ k$

Ilkinji daýanç planyň derňewinde 1-nji ädim onuň optimallygyny barlamak bolup durýar.

Eger (m+1)-nji setirde otresatel san ýüze çykmasa, plana optimal diýilýär, Başgaça aýdylanda eger $z_j-c_j \geq 0$ şert ähli j= 1,2... k üçin ýerine ýetse. Onda plan optimaldyr.

Bir daýanç planda beýleki daýanç plana geçmegiň hasaplaýyş prosessi aşakdakylardan durýandyr.

1. Eger (m+1)-nji setirde birnäçe otresatel san bar bolsa onda ilki başda üýtgeýänleriň bazisa geçýänini saýlamaly.

Iň bir ýönekeý usuly (m+1)-nji setirdäki otrisatel sanlardan absalýut ululygy boýunça iň ulusyny kesgitlemeli: x_j üýtgeýän bazisa çykýar diýip hasap edeliň.

2. Haýsy üýtgeýäniň bazisden çykýanlygyny kesgitlemek zerurdyr.

j-nji sütüniň ähli položitel koýefisentleri üçin gatnaşyklary kesgitlemeli.

$$\frac{b_1}{a_{1j}}, \frac{b_2}{a_{2j}}, \ldots, \frac{b_i}{a_{ij}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{mj}}$$

Bu gatnaşyklaryň iň kiçisi bazisden çykýan üýtgeýäniň setirini görkezýär bu i-nji setir diýeliň degişlilikde x_j üýtgeýäni x_k+ i bazis üýtgeýän bilen çalyşmaly bolar.

a_{ij} elemente baş element diýip aýdylýar.

3. Täze simpleks tablisany döretmäge geçilende x_j setiriň elementlerini ilki bilen doldurmaly.

Bu setiriň täze elementlerini degişlilikde a_{ij} baş elemente dolmak arkaly doldurylýar.

$$\frac{b_i}{a_{ij}}, \frac{b_{i1}}{a_{ij}}, \ldots, 1, \frac{a_{ik}}{a_{ij}}, 0, 0, \ldots \frac{1}{a_{ij}}, \ldots, 0$$

Täze i-nji setirde C sütüne C_j ululyk goýulýar.

4. Täze (planyň) simpleks tablisanyň sütüni gaýtadan hasaplanýar.

Bu sütüniň i-nji setirinde eýýäm $\frac{b_i}{a_{ij}}$ ululyk bardyr.

Galan elementleri gaýtadan aşakdaky yzygiderlikde hasaplanýar.

$$B_1 - a_{1j} \cdot \frac{b_i}{a_{ij}}; b_2 - a_{2j} \cdot \frac{b_i}{a_{ij}}; \ldots; \frac{b_i}{a_{ij}}; \ldots; b_m - a_{mj} \cdot \frac{b_i}{a_{ij}}$$

5. Koýefisientleriň matrisasynda gaýtadan hasaplama geçirilýär. Täze planda x_1 sütüniň elementleri aşakdaky ýaly aňladylýar.

$$a_{11} - a_{1j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}};\ a_{21} - a_{2j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}}; \ldots; \frac{a_{i1}}{a_{ij}}; \ldots;\ a_{m1} - a_{mj} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}}$$

Galan sütünleriň elementleri hem edil şunuň ýaly täzeden hasaplanýandyr.

6. Täze (planyň) simpleks tablisanyň (m+1)-nji setiri hasaplanýar.

Täze planyň (m+1)-nji setiriniň elementleri iki usulda hasaplanyp biliner.

1) $z_1^1 - c_1$, $z_2^1 - c_2$ we beýlekiler tapawutlary hasaplamak, bu ýerde z^1 sütünleriň (1-njiniň, 2-njiniň we beýlekileriň) degişli koýefisentleriniň köpeltmek hasylynyň jemleridir.
2) Ýa-da üç sanyň umumy düzgüni boýunça gaýtadan hasaplamaly.

Mysal üçin täze planyň (m+1)-nji setiriniň x_1 sütündäki elementi aşakdaka çdeňdir.

$$\left(z_1 - c_1\right) - \left(z_j - c_j\right) \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}}$$

x_2 sütünde

$$\left(z_2 - c_2\right) - \left(z_j - c_j\right) \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \quad \text{we ş.m.}$$

Maksat funksiýasynyň Z_0^1 täze bahasy hem aşakdaky ýaly hasaplanyp biliner.

$$z_0^1 = z_0 - (z_j - z_j) \cdot \frac{b_i}{a_{ij}}$$

Planyň täze wariantynyň hasaplamasy tamamlanandan soňra (m+1)-nji setire täzeden seredip çykmaly.

Eger bu setirde otresatel san bar bolsa onda täze simpleks tablisany (Plany) ýokarda görkezilen yzygiderlikde düzmeli. Egerde ähli sanlar Položitel bolsa onda bu täze düzülen simpleks tablisamyz optimal plan bolyp hyzmat eder.

§ 2.7. Önümçiligi optimal planlaşdyrmada simpleks usuly.

Kärhana bir jynsly käbir önümi öndürýär diýip hasap edeliň. Bu önümleri çykarmaklyk anyk önümçilik faktorlar (resurslar) bilen şertlenen olar dürli görnüşli çigmallardan gurallardan işçi güýjünden elektroenergiýadan ulaglaran ybaratdyr.
Goý bu faktorlarynyň sany m, emma mukdar taýdan aňladyşy her bir faktor degişlilikde birlikde çäklenendir. Bu mukdar degişlilikde b_1, b_2, …b m-e deňdir.

Bar bolan resurslary ulanmagy n dürli usuly we ol ýylda beýleki usullarda çykarylýan önümçilik üçin wagyt birliginde dürli resurs çykdajylary belli diýip hasap edeliň.
Eger i bilen resurslaryň görnüşlerini belgilesek ($i=1,2...m$), j – önümçiligiň usuly (j=1,2…n) onda a_{ij} – wagt birliginde j-nji önümçilik usulynda i-nji resursyň çykdaýjysy bolar.

Goý her bir önümçilik usuly degişlilikde kesgitli önüm çykarýan bolsun c_1, c_2, …, c_n. Kärhananyň işini iň köp önüm öndürmegi üpjün eder ýaly planlaşdyrmaly.

Meseläniň matematiki modelini düzmäge amatly bolar ýaly meseläniň ilkinji berlenlerini tablisada aňladalyň

tablisa 1

resurslar	resuslaryň mukdary	önümçilik usullary			
		1	2	…	n
a	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
b	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	.

.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
öndürýän önümiň mukdary		c_1	c_2	---	c_n

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – bilen kärhananyň 1,2, …, *n* önüçilik usullarynda degişlilikde işlän wagt aralygyny belgiläliň. Meseläniň matematiki modelini düzeris. Berlen şertde çäklendirme aşakdaky sistema eýe bolar.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2 \qquad (1)\\ &- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn} \le b_n \end{aligned}$$

(1) – sistemany gysgaça aşakdaky görnüşde hem aňladylyp bilner.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1,2 \ldots, m)$$

(1) sistemanyň ähli çözüwleriniň içinden $L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots c_nx_n$ funksiýanyň (önüminiň summar ululygyny) bahasyny maksimal baha eýe edip biljeklerini tapmaly.

Şeýlelikde meseläniň matematiki modeli aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$$

$$x_j \ge 0$$

çäklendirme ýerine ýetende

Maksat funksiýasy maksimuma ymtylýar

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

Aşakdaky san bahaly meselä seredeliň

Meseläniň ykdysady görkezjileri aşakdaky tablisada berlen

tablisa

resursyň görnüşleri	Bar bolan resurs	Tehnologiki proses boýunça resursyň çykdaýjysynyň normasy		
		1	2	3
a	40	2	1	2
b	90	4	2	3
c	30	1	1	2
Wagt birliginde tehnologiki prosses boýunça çykarylýan		10	8	12

Kärhananyň maksimal mukdarda önüm çykarýan aralygynda her bir tehnologiki prosesiň ulanylýan wagtyny kesgitlemek talap edilýär.

Meseläniň matematiki modelini düzmek üçin dolandyryşynyň parametrlerini saýlamak zerurdyr. Seredilýän mesele üçin dolandyryş parametri meseläniň şertinden görnüşi ýaly üç tehnologiki proseslериň her biriniň ulanylan wagty bolup durýandyr. Şunuň bilen baglanşykda 1-nji tehnologiki prosesiň ulanylan wagtyny x_1, ikinji – x_2, üçinji x_3

(2) – den ugur alyp maksat funksiýany aşakdaky görnüşde aňladarys.

$$L(x) = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$$

Her bir resursyň görnüşleri boýunça üç tehnologiki prosesiň özlerine degişli wagytda ulanjak summar çykdaýjylaryny çäklendirmegiň sistemasy aşakdaky görnüşdedir.

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40\\
&4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 90\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Şeýlelikde meseläniň matematiki modeli aşakdaky görnüşi alar

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40\\
&4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 90\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0\\
&L(x) = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \rightarrow \max
\end{aligned}$$

Çäklendirmeler ýerine ýetende funksiýanyň maksimal bahasyny tapmaly.

Beýle meseleleri çözmek üçin Simpleks – usul ulanylýar. Şonuň üçin meseläniň şertini goşmaça näbelileri ulanmak bilen Kononik görnüşe getirýäris.

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 40\\
&4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 90\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 = 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Bazis üýtgeýänleri kesgitläp (x_4, x_5, x_6) meseläniň şertini aşakdaky görnüşde ýazarys.

$$\begin{aligned}
&x_4 + 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 40\\
&x_5 + 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 90\\
&x_6 + x_1 + x_2 + 2x_3 = 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0\\
&L(x) - 10x_1 - 8x_2 - 12x_3 \rightarrow \max
\end{aligned}$$

Bu görnüşden peýdalanyp 1 – nji simpleks – tablisasyny guralyň

tablisa 1

bazis üýtgeýän	erkin çlenler	dolandyryş parametrleri						0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	40	2	1	2	1	0	0	40/2
x_5	90	4	2	3	0	1	0	90/3
x_6	30	1	1	2	0	0	1	30/2
L (x)	0	– 10	– 8	– 12	0	0	0	–

Ilkinji simpleks tablisadan 2-nji simpleks tablisanyň elementleri aşakdaky görnüşde hasaplanýar netijede 2-nji simpleks tablisany alarys.

$b_1=\frac{4\bullet 2-30\bullet 2}{2}=10$ $a_{11}=\frac{2\bullet 2-1\bullet 2}{2}=1$ $a_{12}=\frac{2\bullet 1-2\bullet 1}{2}=0$

$b_2=\frac{90\bullet 2-30\bullet 3}{2}=45$ $a_{21}=\frac{4\bullet 2-3\bullet 1}{2}=5/2$ $a_{22}=\frac{2\bullet 2-3\bullet 1}{2}=1/2$

$b_3=\frac{30}{2}=15$ $a_{31}=\frac{1}{2}=1/2$ $a_{32}=\frac{1}{2}=1/2$

$\frac{0\bullet 2-(-12)\bullet 30}{2}=180$ $c_1=\frac{-10\bullet 2-(-12)\bullet 1}{2}=-4$ $c_2=\frac{-8\bullet 2-(-12)\bullet 1}{2}=-2$

$a_{13}=\frac{2-3}{2}=0$ $a_{14}=\frac{2\bullet 1-0\bullet 2}{2}=1$ $a_{15}=\frac{2\bullet 0-2\bullet 0}{2}=0$

$a_{23}=\frac{3-3}{2}=0$ $a_{24}=\frac{2\bullet 0-3\bullet 0}{2}=0$ $a_{25}=\frac{2\bullet 1-3\bullet 0}{2}=1$

$a_{33}=\frac{2}{2}=1$ $a_{34}=\frac{0}{2}=0$ $a_{35}=\frac{0}{2}=0$

$c_3=\frac{-12+12}{0}=0$ $c_4=\frac{2\bullet 0-(-12)\bullet 0}{2}=0$ $c_5=\frac{2\bullet 0-(-12)\bullet 0}{2}=0$

$a_{16}=\frac{2\bullet 0-2\bullet 1}{2}=-1$ $\frac{10}{1}=10$

$a_{26}=\frac{2\bullet 0-3\bullet 1}{2}=-3/2$ $\frac{45}{5/2}=18$

$a_{36}=\frac{1}{2}=1/2$ $\frac{15}{1/2}=30$

$$c_6 = \frac{2 \bullet 0 - (-12) \bullet 1}{2} = 6$$

Tablisanyň iň soňky setiriniň näbelileriniň kofesientliniň ählisi položitel boýunça öwürme geçirip indiki simpleks tablisany almagy ýerine ýetirmeli.

tablisa 2

bazis üýtgeýän	erkin çlenler	dolandyryş parametrleri						0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	10	**1**	0	0	1	0	– 1	10
x_5	45	5/2	1/2	0	0	1	– 3 /2	18
x_3	15	1/2	1/2	1	0	0	1/2	30
L (x)	180	– 4	– 2	0	0	0	6	–

x_4 – iň ýerine täze bazis üýtgeýän x_1 bolar.

tablisa 3

bazis üýtgeýän	erkin çlenler	dolandyryş parametrleri						0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	10	1	0	0	1	0	– 1	00
x_5	20	0	1/2	0	– 5/2	1	1	40
x_3	10	0	1/2	1	– 1/2	0	1	20
L (x)	220	0	– 2	0	4	0	2	

x_3 – bazis elementiň ýerine täze x_2 bazis geçýär.

tablisa 4

bazis üýtgeýän	erkin çlenler	dolandyryş parametrleri						0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	10	1	0	0	1	0	– 1	– 1
x_5	10	0	0	– 1	– 2	1	0	0
x_2	20	0	1	2	– 1	0	2	2
L (x)	260	0	0	4	2	0	6	

Iň soňky tablisa 4 optimalygyň talabyny kanagatlandyrýar. Onda optimal plan boýunça maksat fynksiýamyzyň bahasy L (x) max = 260 1 – nji nehnologiki proses 10 wagyt birligi $x_1 = 10$ ikinji tehnologiki proses 20 wagyt birligi $x_2 = 20$ üçinji tehnologiki prosesi bolsa ulanylmanda ony ulanmak maksada laýyk däl bolup çukdy $x_3 = 0$

Alynan çözüwiň netijesini aşakdaky görnüşde aňsat barlamak bolar.

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \times 10 + 20 + 2 \times 0 = 40$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \times 10 + 2 \times 20 + 3 \times 0 = 80 < 90$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 + 20 + 2 \times 0 = 30$$
$$L(x) = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$$

§2.8. Çatyrymlanan mesele we bahalandyrma.

Çyzykly progrommirlemegiň umumy häsiýetine gaýdyp geleliň we önümi maksimal çykarmaga ýetmek üçin çäklendiriln serişdede resurslary iň gowy paýlamagyň ykdysady meselesini formulirläliň.

Önümçilikde m b_1, b_2,... b_m ululyklarda çäklenen mukdarda dürli görnüşliresurslar (zähmet resursy, materiallar, we çig mal, enjamlar we ş.m.) ulanylýar diýeliň. Şeýle hem, x_1, x_2,... x_n degişli mukdarda görnüşli önüm öndürilmegi mümkin. Her bir önümiň birligine her bir resursdan edilýän çykdaýjynyň normasy aşakdaky matrisany emele getirýändir.

a_{11}, a_{12},... a_{1n}

a_{21}, a_{22},... a_{2n}

a_{m1}, a_{m2},... a_{mn}

Her bir görnüşli önüm birligniň bahasy meselede degişlilikde c_1, c_2,... x_n-ne deňdir.

Mesele aşakdakydan jemlenýär:

Resurslaryň berlen çäklerinden çykmazdan ähli önümleriň gymmatyny maksimuma ýetirýän x_1, x_2,... x_n üýtgeýän ululyklaryň bahasyny tapmaly.

Meseläniň matematiki formasy nidiki görnüşde ýazylýar.

$$
\begin{aligned}
& c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k \leq b_m \\
& x_j \geq 0
\end{aligned}
$$

Seredip görsek ýokarda berlen meseläniň berlenleriniň esasynda ýene bir mesele goýmak mümkindir. Ýöne y_1, y_2,... y_n üýygeýän ululyklarda degişlilikde resurslaryň her bir görnüşiniň bahalandyrylyşyny kesgitlense.

Şeýle şertlerde önümiň bir-birligine edilýän resurslar çykdaýjysynyň summar bahalanylyşy bu birligiň bahasyndan kiçi bolmakda, ähli bar bolan resurslaryň umumy bahalandyrylyşy minimal bolar ýaly.

Mesele matematiki indiki ýaly jemlenýär.

$$
\begin{aligned}
& b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min \\
& a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1 \\
& a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2 \\
& a_{1n} y_n + a_{2n} y_n + ... + a_{mn} y_m \geq c_n \\
& y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Iki meseläni deňeşdireliň.

Bulardan birinjisi maksimuma, ikinjisi bolsa minimuma gözlenýän meselelerdir. Şonuň üçin çäklendirmeleriň häsiýeti hem üýtgeýär.

Birinji meselede n näbelli m çäklendirme, ikinjiden m näbelli n çäklendirmedir.

Maksat funksiýalaryň koýefisentleri (aňlatmalar maksimum we minimum ymtaýar) we deňsizlikleriň sag tarapgy ululyklary bir meseleden beýleki meselä ýerlerini üýtgedýärler.

Ikinji meseläniň koýefisentlerinden düzilen matrisa aşakdaky görnüşe eýedir.

$a_{11}a_{12}$ ... a_{m1}

a_{12} a_{22} ... a_{m2}

a_{1n} a_{2n} ... a_{mn}

Muny birinji meseläniň koýefisentlerinden düzülen matrisanyň setirlerini sütünleri bilen ornuny çalyşmak arkaly almak bolar. Görşümiz ýaly bu iki mesele özara jebis baglanşyklydyr. Olar jübit meseleleri döredýärler, çyzykly programmirlemekde çatrymlaýyn jübit diýilýär.

Bulardan birinjisine adaty göni mesele ikinjisine bolsa çatryklanan mesele diýilýär. (arassa matematiki nokady nazardan seredilende islendik adaty göni meseläniň islendiginiň çatrym jübit meselesi bardyr)

Ykdysady tarapdan göni meseläni çözmek önüm öndürmegiň optimal planyny, ýöne çatrym meseläni çözülerde-optimal şertleriň sistemasynda ulanylýan resurslaryň bahalandyrylyşyny berýär.

Seredýän meseläniň hemişelik we üýtgeýän ululyklarynyň ölçeglilik we ykdysady manylylyk nukdaý nazaryndan üns berilse onda göni mesele üçin indiki gatnaşygy ýazmak bolar.

Çäklendirýän şert.

$$\sum \quad a \quad \cdot \quad x \quad = \quad \sum ax \quad \leq \quad b$$

$$\sum \begin{pmatrix} \textit{Önümiň}\text{ birligine} \\ \text{resurslar çykdaýjysynyň} \\ \text{normasy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Çykarylýan önümiň} \\ \text{ölçegi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Resurslaryň umumy} \\ \text{çykdaýjysy} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{Bar bolan} \\ \text{resurslar} \\ \text{görkezýär} \end{pmatrix}$$

Ýokarky çäklendirmelerde funksiýany minizirlemeli.

$$\sum \quad c \quad \cdot \quad x \quad = \quad \sum cx \quad \to \max$$

$$\sum \begin{pmatrix} \textit{Önümiň} \\ \text{birliginiň gymmaty} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Çykarylýan önümiňn} \\ \text{ölçegi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ähli önümiňn} \\ \text{gymmaty} \end{pmatrix} \to \max$$

Çatryklanan mesele üçin aşakdaky gatnaşyk bolar.
Çäklendirilýän şert.

$$\sum \quad a \quad \cdot \quad y \quad = \quad \sum a \cdot y \quad \geq \quad c$$

$$\sum \begin{pmatrix} \textit{Önümiň birligine} \\ \text{resurslar} \\ \text{çykdaýjysynyň} \\ \text{normasy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Birlik resurslara} \\ \text{şertli bahalandyrma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Önümiňň birligine} \\ \text{çykarylýan resurslara} \\ \text{umumy bahalandyrma} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \text{Önümiňň bir} \\ \text{birligini ň} \\ \text{gymmaty} \end{pmatrix}$$

Ýokarky çäklendirmelerde funksiýany minizirlemeli.

$$\sum \quad b \quad \cdot \quad y \quad = \quad \sum by \quad \to \min$$

$$\sum \begin{pmatrix} \textit{Bar} \text{ bolan} \\ \text{resurslaryň göwrümi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Birlik resurlara} \\ \text{şertli bahalandyrmak} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Bar bolan resurslara} \\ \text{umumy bahalandyrma} \end{pmatrix} \to \min$$

Çyzykly programmirlemekde aşakdaky esasy çatrymlaýyn teoremasy subut edilýär:

Eger çatyrym jübit meseläniň biriniň optimal çözüwi bar bolsa onda beýleki biriniň hem çözüwi bardyr özünem göni mesele maksimuma we çatyrym mesele minimum san baha deňdir. Iki meseläniň optimal planlary diňe maksat funksiýalarynyň deňligi bilen baglanşmaýar. Olarda başgada wajyp gatnaşyklar saklanýar.

Egerde göni meseläniň optimal planynda i-nji çäklendirme birlik deňsizlik ýaly ýerine ýetýän bolsa onda çatyrym meseläniň optimal planynda oňa degişli i-nji üýtgeýän nula deňdir.

Ykdysady many tarapdan bu çatyrym položitel bahalandyrylan resurslar optimal planda doly ulanylan resurslar bolmalydyr. Doly ulanylmadyk resurslar bolsa elmydama nula deňdir. (göni meselede hem doly ulanylmadyk resurslaryň çäklendirmesi hem optimal planda berk deňsizlik ýaly ýerine ýetýändir).

Başga tarapdan eger käbir j-nji üýtgeýän göni meseläniň optimal planyna položitel bahada girýän bolsa onda çatyrym meseläniň optimal planynda degişli çäklendirme berk deňlik ýaly ýerine ýeter. Eger j-nji üýtgeýän göni meseläniň optimal planyna girmeýän bolsa onda çatyrym meseläniň optimal planynda degişli j-nji çäklendirme berk deňsizlige öwürýändir.

Bu matematiki baglanşygyň ykdysady manysy aşakdakylardan durýandyr.

Eger berlen görnüşli önüm optimal plana girýän bolsa onda resurslara çatrymlanan bahalandyrma, bu önümiň birligine çykdaýjy onuň bahasyna we önümi öndürmegi kanagatlandyrýan bahadan takyklygyna deňdir. Eger berlen önümi öndürmek amatsyz we ol optimal plana girmeýän bolsa onda bahalandyrma boýunça onuň öndürilmegi zyýanlydyr.

Başgaça aýdanda oňa edilýän ersurs çykdaýjylaryň bahalanşy bu ömümiň bahasyndan köp bolup çykýar.

Çatrymlanan meseleler jübütiniň her biri özbaşdak çyzykly programmirlemegiň meselesi bolup biler we biri-birine bagly bolman çözülip bilner. Ýöne simpleks usuly ulanyp çözülende biriniň çözüwinden beýleki çatrymlynyň çözüwi öz-özünde gelip çykýar. (aftomatiki)

Öňki paragytda seredeliň meselämize gaýdyp geleliň. Bu ýerde mesele şeýle goýulypdyr. Önümçilikde iň uly resitosesnosty üpjün etmek üçin çykarylýan dört görnüşli detalyň optimal düzümini kesgitlemekden durýar. Haçanda üç topardan ybarat enjamlaryň iş wagtynyň fondy çäklendirilen faktor bolonda.

Meseläniň şerti aşakdaky ýaly formulirlenen.

$0,4x_1+ 0,2\ x_2+ 0,5\ x_3+ 0,8\ x_4 \rightarrow \max$

$x_1+ 2x_2+ 4x_3+ 8x_4 \leq 24000$

$3x_1+ 5x_2+ x_3 \leq 12000$

$6x_1+ 3x_2+ x_4 \leq 30000$

Bu meselä üçin çatyrym meseläni düzeliň.

Çatrymlanan meselede y_1, y_2, y_3, üýtgeýän ululyklar enjamlaryň iş wagtyny şertli bahalandyrylyşy özünde jemlär.

Çatrymlanan mesele aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$24000\ y_1+ 1200\ y_1+ 30000\ y_3 \rightarrow \min$

$y_1+ 3y_2+ 6y_3 \geq 0,4$

$2y_1+ 5y_2 \qquad \geq 0,2$

$4y_1+ y_2+ 3y_3 \geq 0,5$

$8y_1 \qquad + y_3 \geq 0,8$

Görnüşi ýaly göni mesele 4 üýtgeýän we 3 çäklendirmeden we maksimuma, çatyrym mesele bolsa 3 üýtgeýänden we 4 çäklendirmeden minimuma çözülýändirler.

Öňki paragflarda göni meseläniň çözülen soňky tablisanyň “Plan” sütüninde meseläniň çözüwi bardyr. Ol aşakdakylardan durýandyr.

$x_1 = 4000$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 25000$

Optimal plan boýunça peýdanyň jemi 3600 müň manatdan durýandyr.

Çatrymlanan meseläniň çözüwi Z_j^{11}- C_j setirde şol soňky üç sütünde ýerleşendir. Bu çözüwler aşakldakylardyr.

$y_1 = 0,1$; $y_2 = 0,1$; $y_3 = 0$

y üýtgeýän enjamlaryň bir minut iş wagtyny bahalandyrylşyny aňladýar. Şeýlelikde I we II enjamlar topary üçin bu bahalandyrma deňdir we 0,1-den durýandyr; III enjamlar toparlary üçin nula deňdir, şeýle hem wagt fondy bu enjamlar toparynda optimal planda doly ulanylmaýar.

Getirilen bahalandyrylyşyň bahalary çatyrymlanan meseläniň ähli şertlerini kanagatlandyrýar. Şeýle hem maksat funksiýasynyň minimum bahasy göni meseläniň maksimum bahasy bilen gabat gelýändir.

Ýangy $24000 \cdot 0,1+ 12000 \cdot 0,1+ 30000 \cdot 0 = 3600$

Beýle diýildigi çatrymlylygyň esasy teoremasy doly gabat gelýär diýildigidir.

Çatrymlanan meseläniň goýulşynyň çäklendirmesinden alarys.

$0,1+3\cdot 0,1=0,4$
$2\cdot 0,1+5\cdot 0,5>0,2$
$4\cdot 0,1+0,1=0,5$
$8\cdot 0,1=0,8$

Şelelikde çatyrym meseläniň çäklendirmesinde hem ýerine ýetýänligi görünýär.

3.Ulag meselesi

§3.1. Ulag meselesiniň açyk we ýapyk modelleri we olaryň häsiýetleri.

Ulag meselesi çyzykly programirlemekden kesgitli ykdysady häsiýetleri we matematiki görnüşiniň aýratynlygy bilen tapawutlanýar. Ýönekeý ulag meselesiniň goyulşynyň mazmuny aşakdakydan durýandyr. Dürli ýerlerden iberlen bir meňzeş ýükleri birnäçe talap edijilere punktlara daşamak talap edilýär. Her bir iberji punktdan birnäçe ýük gaýytýar.

Şol sanda her bir talap ediji punkt hem haýsy iberijiden gelendigine garamazdan birnäçe ýüki kabul etmeli. Iň esasy zat ýük daşamagyň çykdaýjysyny minimal bolar ýaly edip gurnamak.

Goý m iberiji punkt bar diýeliň a_1 a_2 ...a_m we b_1,b_2 ... b_n kabul ediji punktlar bolsun A_i punktdan iberlen ýükiň mukdaryny bolsa a_i bilen belläliň we b_j bilen bolsa b_j punktda gelmegine garaşylýan ýükiň mukdaryny belläliň c_{ij} bilen bolsa a_i-den b_j-e daşalan ýükiň bir ölçeg birligine düşýän çykdajyny belläliň. Jemi iberijidäky ýükiň mukdary bilen talap edijileriň ýükiň mukdary deň diýip kabul edeliň.

$a_1+a_2+a_3+...+a_m=b_1+b_2+b_3+...+b_n$

Aşakdakylary doly kanagatlandyrýan ýük daşamagyň plany gurmak gerek bolsun.

1.Talap ediji b_1,b_2... b_n (punktlaryň) ählisini hem doly ýük bilen üpjün etmeli.

2. Iberiji a_1 a_2 ...a_m punktlarynyň ähli ýükini daşamaly.

3. Ýük daşamagy umumy çykdajysy iň az bolar ýaly bolmaly.

Biziň meselämiz boýunça mn sany otrisatel bolmadyk näbelli bardyr.

Ol a_i –den a_j –e iberlen ýükiň mukdaryny aňlatýandyr.

Daşamagyň materiýasy diýen ady göterýän tablisany düzeliň. Ol aşakdakydan durýandyr.

Iberiji A_i punkt	Talap ediji puhkt B_j			Bar bolan ýük a_1
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{14}	a_2
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{24}	a_2
A_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{mn}	a_m
Zerur bolan ýük b_j	b_1	b_2	B_n	$S=\sum_{j=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Ähli talap edijilere $a_1$iberiji punktdan iberiljek ýükiň mukdary a_1 –deňdir.

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1$

B_1 talap ediji punkta ähli iberijilerden gelen ýük b_1 –a deňdir.

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1$

Edil şonuň ýaly galan iberijiler we talap edijiler üçin hem ýerine ýetirip aşakdaky deňlemeler sistemasyny alarys.

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{m}=a_1$

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2$

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m$

$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{mi}=b_1$

$x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_1$

$x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n$

a_i –den b_j-e ýük daşamakda ýükiň bir ölçeg birligine düşýän çykdajy c_{ij} we x_{ij} daşalan ýükiň mukdary onda umumy çykdajyny aşakdaky görnüşde aňlatmak bolar.

$$S=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} cij\ xij$$

Şeýlelikde deňlemeler sistemasynda we çyzykly funksiýadan ybarat çyzykly programirlemegiň meselesine geldik. Talap edilýän zat sistemanyň otrisatel bolmadyk funksiýany minimum baha eýe edip biljek çözüwlerini tapmaklykdyr.

Bu mesele gysgaça aşakdaky görnüşde ýazylýar.

Minimizirlemesi $S=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$ haçanda, aşadaky çäklendirme ýerine ýetende

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i\ (i=1,2,...m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=b_i\ (j=1,2,...n) \qquad x_{ij}\geq 0$$

Ýokarky deňlemeleriň çep tarapy şol bir ululykdyr onda olaryň sag tarapy hem özara deňdir.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bu ýerden enede bir görnüşli (важное) netije gelip çykýar: Ýagny m+n deňlemden ybarat bolan ulag meselesiniň çäklendirmesiniň sistemasyna bir deňlemesinden galan m+n-1 deňlemesi gelip çykýandyr.

Şeýle, hem ähli mümkin bolan mn uguryň optimal plan boýunça m + n-1-dan köp bolmadyk ugry ýüklenip biliner.

Beýle görnüşdäki seredilýän ulag meselesine ýapyk model görnüşli ulag meselesini diýilýär.

Açyk modelli ulag meselesi hem ykdysady hasaplamalarda az rol oýnamaýar. Bu ýagdaýda deňlemeleriň saklanmaýar. Munda iki ýagdaý bolmagy mümkin.

1. Iberijiniň mümkinçiligi talap edijiden köp bolmak ýagdaýy.
2. Iberijiniň mümkinçiliginden talap edijiniň köp bolan ýagdaý.

Eger 1-nji ýagdaý ýerine ýetýän bolsa onda açyk ulag meselesi aşakdaky

görnüşde aňladylýar.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Şertlerde

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \; (j=1,2,...m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i \; (j=1,2,...n)$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Bu ýerde deňsizlikden görnüşi ýaly ähli ýükler talap edijilere ugradylmaz. Şonuň üçin deňsizligi deňlige öwürmek üçin goşmaça otrisatel bolmadyk üýtgeşikleri ulanmaly bolar. Onda deňsizlikler sistemasyna derek aşakdaky deňlemeler sistemasyny alarys.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

ýada açyp alsak aşakdaky görnüşe eýe bolan

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}\, x_{1,\,n+1} = a_1$$
$$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}\, x_{2n,\,n+1} = a_2$$
$$x_{mi}+x_{m2}^{+}+\ldots+x_{mn}^{+}\, x_{m,\,n+1} = a_m$$

Bu ýerde $x_{1,n+1}$, $x_{2,\ n+1}$,..., $x_{m,\ n+1}$+goşmaça üýtgeýän, ulanylman galan ýükiň mukdarydyr. Goşmaça üýtgeýänleriň jemi aşakdaky tapawuda deňdir.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij,\ n+1} = a_i \sum_{j=1}^{m} a_1 - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{u.g}$$

Iberijiniň mümkinçiliginde talap edijini talaby köp bolan ýagdaýynda açyk ulag meselesiniň modeli aşakdaky görnüşe eýe bolar.

Minimizirlemeli

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

Şert erne ýetende

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \; (j=1,2,...m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le b_i \; (j=1,2,...n)$$

$$x_{ij} \ge 0$$

§ 3.2. Ulag meselesini çözmegiň paýlama usuly.

Ulag meselesini çözmekligiň paýlama usulyna indiki mysalyň üsti bilen seredeliň.

Goý bir şäheriň çäginden bir meňzeş ýükleri üç iberijiden (a_1 a_2 we a_3) belenen (b_1 b_2 we b_3) talap edijilere daşalýan bolsun. Jemi her günde 30 t ýük şol sanda birinji iberijiden-12 t, ikinji iberijiden-8 t, üçinji iberijiden bolsa-10 t. Bu 30 t ýükiň degişlilikde talapedijilere aşakdaky mukdary gelip düşmeli.

Şol sanda birinji talapedijä-6 t, ikinji talapedijä-9 t, üçinji edijä bolsa-15 t.

Iberijiler bilen talapedijileriň degişlilikde öz-ara uzaklygy bellidir. Şol sanda b_1-dan degişlilikde a_1 a_2 we a_3 çenli 1.2 we 6 km-e deňdir. a_2-den degişlilikde a_1 a_2 we a_3 çenli 3.5 we 4km-e deňdir.

Ähli bar bolan we näbelli ululyklary tablisa görnüşinde aňladalyň.

Iberiji a_1 punkt	Talapediji B_j punkt			Iberiljek ýükiň mukdary a_1 +
	b_1	b_2	b_3	
a_1	1 x_{11}	3 x_{21}	4 x_{13}	12(a_1)
a_2	2 x_{21}	5 x_{22}	3 x_{23}	8(a_2)
a_3	6 x_{31}	7 x_{32}	4 x_{33}	10(a_3)
Kabul edilmeli vxki mukdary b_jt	6 (b_1)	9 (b_2)	15 (b_3)	30 $\sum a_1=\sum b_j$

Düzjek planymyz boýunça iň az t.km ýol geçilmegini üpjün etmegi talap edilýär. Bu meseläniň matematiki aňladylyşy aşakdakydan ybaratdyr.

$$S=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} cij\, xij = x_{11}+3\, x_{12}+4\, x_{13}+2\, x_{21}+5\, x_{22}+3\, x_{23}+6\, x_{31}+7\, x_{32}+4\, x_{33} \rightarrow \min$$

Bu ýerde cij-i-nji iberiji punkt bilen j-nji talap ediji punktyň aralygy, cij xij punktlaryň arasynda ýükiň daşalan tonna-kilometri.

Meseläniň çäklendirmesi görnüşe eýe bolar.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}=12$ $\quad$ $x_{11}+x_{21}+x_{31}=6$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}=8$ $\quad$ $x_{12}+x_{22}+x_{32}=9$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}=10$ $\quad$ $x_{13}+x_{23}+x_{33}=15$

Ilkinji daýanç plany almak üçin demirgazyk günbatar burnç diýilip atlandyrylan düzgüniulanmak has amatly hasap edilýär. Onuň üçin tablisanyň ýokary çep kletkasyndan dolandyryp gaýdylýar we aşaky sag kletka tarap dolandyrýar. Şeýlelikde doldurylan kletkalaryň sany n+m-1 bolmalydyr buýerde n-talap edijileriň sany m-iberijileriň sanydyr.

Ýokary aýdylan düzgün boýunça tablisany düzeris.

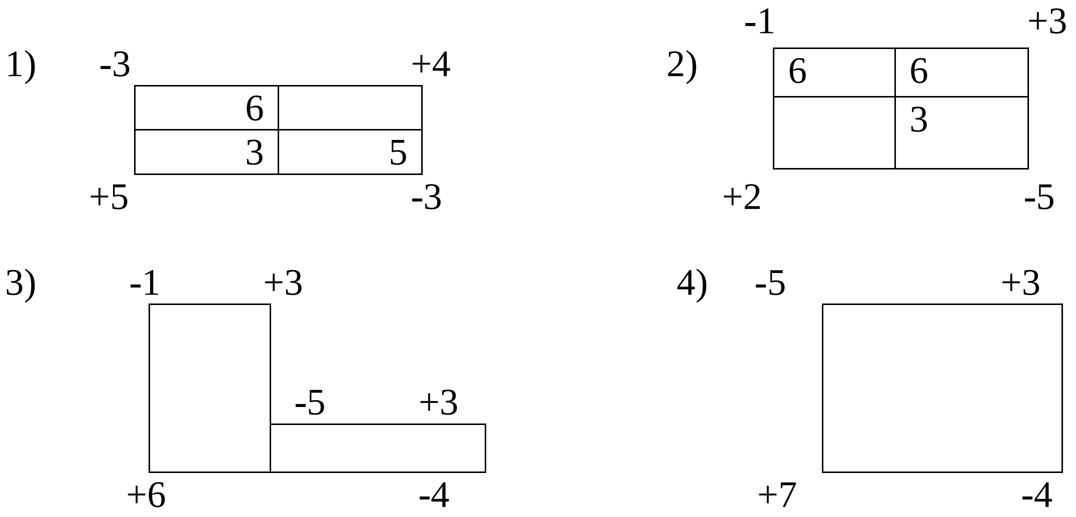
Iberiji	Talap ediji			A_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 6	3 6	4	12
A_2	2	5 3	3 5	8
A_3	6	7	4 10	10
B_j	6	9	15	30

B_1talapediji punkta hökman 6 týük iberilmeli. Şonuň üçin hem ýokary çep kletkany doly kanagatlandyrmaly bu san bolsa 6 tonnadyr, a_1 b_1 kletkany dolduryp şol setiriň a_1b_2 kletkany hem a_1-dan 6 t ibermek mümkinçiligi bardyr. Görnüşi ýaly a_1 –iň doly mümkinçiligi ulanyldy. Bir talap ediji punkta hökmany 9 t ýük iberilmeli. Onuň galan 3 t –syny a_2 oberiji punktdan iberýäris. b_2 –doly kanagatlandyryldy. a_2 –niň galan 5 t ýükini b_3 talap ediji punkty ibermek bolar. b_3 talap ediji punkty doly kanagatlandyrmak üçin ýenede 10 týük ugratmaly ony hem a_3 iberijiniň doly 10 t mümkinçiligini— ibermek bilen kanagatlandyrýarys. Alynan plana optimal diýip bilmeris ýöne ol meseläniň çäklendirmesini doly kanagatlandyrýandyr. Ummumy daşalan ýükiň t-km-i aşakdakydan durýandyr.

$$6x1+6x3+3x5+5x3+10x4 = 94 \text{ T-km}$$

Mundan beýläk daýanç plany gowlandyryp bolarmy kesgitlemek durýar. Ilkinji daýanç planynda 5 kletka doldyryldy ýöne 4 kletka doldyrylman galdy. Doldurylman galan kletkalary ulanmak üçin öz boluşly köpburçlukdan ybarat bolan zynjyry gurmaly.

Ol zynjyrlar her bir doldyrylman galan kletka üçin aşakdaky görnüşi alar.



Köpburçluklaryň depelerindäki ululyklaryň algebraýik jemini kesgitläliň onda

+4-3+5-3-+3 (1)
+2-1+3-5=-1 (2)
+6-1+3-5+3-4=+2 (3)
+7-5+3-4=+1 (4)

Köpburçluklaryň depeleriň algebraýykjeminiň ykdysady seredip görsek (2)-ýagdaý plany gowlandyrmaga gollag berip biljek.

Mundan ugr alyp öwürme geçirilenden soňra gowulandyrylan plany olarys ýöne oňa heniz optimalyny diýip aýdyp bilmeris.

Iberiji	Talap ediji			A_i,T
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 3	3 9	4	12
A_2	2 3	5	3 5	8
A_3	6	7	4 10	10
b_j,T	6	9	15	30

Bu ýagdaý üçin jemi T-km aşakdaka deň bolar.

3x1 + 9 x 3+3 x 2+5 x 3+10 x 4=91 T-km

Alynan plan boýunça ilkinji daýanç planda 3T-km az ýük daşamalydygy anyklandy. Şeýle hem bolsa täze gowlandyrylan planmyzdan optimal däl bolmagymümkin. Muny hem barlamak üçin ýokarda görkezilişi ýaly ýapyk zynjyrlary gurnap barlamak bolar.

Mysal üçin a_3 b_2 kesişmelerinden ýerleşýän kletkanyň köpburçlyk gözlenilen sütümleriň algebraýik jemine eýe bolar kletkadan başlanýan algebraýik jemi =7-2+1-3+3-4=+2

Bu plany mundan beýläk gowlandyryp bolmajakdygyny aňlatýar. Diýmek soňky plan optimaldyr. Seredilen mysalda optimal plan bary ýogy birje geçiş boýunça alyndy munyň özi görkezýär ýagny ilkinji daýanç planymyzyň optimal golaýdygyny.

§3.3. Ulag meselesini çözmegiň potensiýallar usuly.

Eger aşakdaky tablisa ünis bersek onda onuň ýüki daşamagyň ilkinji paýlanşygydygyny görýäris ýada ilkinji daýanç planydyr.

Iberiji	Talapediji			A_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 6	3 6	4	12
A_2	2	5 3	3 5	8
A_3	6	7	4 10	10
b_j	6	9	15	30

Bu etaba meseläni çözmegiň taýýarlyk etaby hem diýmek bolar.

Bu etapdan soň näbelikler iki topara bölünýär X_{ki}-bazis; X_{py} bazis däl (erkin). Şonuň üçin s-maksat funksiýanyň erkin näbellileriň üsti bilen aşakdaky görnüşde aňladarys.

$$S=\sum_{P.q} S_{P.q} X_{P.q} + s$$

Ilkinji planda erkin näbeldileriň bahasy nula deňdir şonuň üçin S=s Seredilýän mysalda S=94 T-km; S iň soňky ýagdaýlary $S_{P.q}$ we $x_{P.q}$–yň üsti bilen kesgitleme Meseläniň minumyna gözlenýänligi sebäpli S iň soňky bahalary kiçeler. Şonuň üçin hem $S_{P.q}$ koefisiýentiniň plany gowulandyryp biljek amatly bahasyny tapmaly. $S_{P.q}$ koefisiýentleri tapmak üçin potensiýallar usuly ulanylýar. Meseläni çözmek üçin $S_{P.q}$ koefisiýentleri ulanmagyň algoritmine hem potensiýallar usuly (metod potensiýallar) diýip atlandyrylýar.

Bu usuly ulanylanda hem ilkinji daýanç plany demirgazyk-günbatar burç düzgüni (по правилу северо-западного угла) boýunça doldurylýar.

Şeýle hem her bir setiri we sütini ýörite koefisiýentleriň üsti bilen kesgitlenilýär.

λ_i potensial-a_i iberjilere geçişlili

$ß_j$ potensial-b_i talap edijilere degişlidir

Islendik ýüklenen kletka üçin optimalygyň şerti boýunça (стоимость перевозписки) ýüki daşamagyň bahasy koefisiýentleriň jemine deňdir.

$c_{ij} = \lambda_i + ß_j$

Her bir erkin kiletka üçin bolsa

$S_{P.p} = c_{P.p} - (\lambda_i + ß_j)$ tapawut hasaplamaly.

Bu tapawutlaryň içindäki otrisatel kletkada gelejekde gowlandyrmaga degişli däldir.

Täze plana geçmeklik umumy düzgün boýunça ýagny tapawutlaryň obsolýut ulylygy boýunça iň ulegsini şekiliň başlangyjy edip (+) znarž almak bilen ýüklenen kletkanyň arasynda 90%-lik burç bilen birleşdirip başga znagynyň üýtgedip çekilip gurylmalydyr. Soňra günde degişli kletkalaryň otrisatel kletkalaryny içinden iň az ýüki saýlap položitel kletkalara şonça mukdarda ýüki goşmaly otrisatel kletkalardan bolsa şonça mukdardaky ýüki aýyrmaly. Bu ýokarky düzgün boýunça her bir täze plany düzmeli haçanda $S_{P.\,q} = c_{P.\,q} - (\lambda_i + ß_j)$ tapawudyň bahalarynyň içinde otrisatel baha bolmasa onda ol plan optimal plandyr.

Patensiallar usulyny ulanyp aşakdaky meseläniň çözülşine seredeliň. a_1 we A_2 kärhanalaryň gündelik öndürijiligi degişlilikde 120 we 180 müň önüm birligi. Bular üç sany talapedijileri önüm bilen üpjün edýärler. Her bir talap edijä degişlilikde (b_1)-155 müň birlik, (b_1)-130 müň birlik, (b_3)-90 müň birlikde, birlik planlaşdyrylan.

Umumy talap edilýän önüm kärhanalaryň önümçilik kuwwatyndan 75 müň birlik köpdir şonuň üçin taslamadan iki wariant göz öňünde tutulýar a_2 kärhanany rekonstruksiýa etmek a_3 ýada a_4 täze kärhananyň gurluşygyny ýerine ýetirmek.

Önimiň bir ölçeg birliginiň çykdajy hereketdäki kärhanalar üçin önüme düşýän gymmaty we daşamak edilen çykdaja durýar.

Iberiji	Talap ediji		
	B_1	B_2	B_3
A_1-kärhana	3	3	4
A_2-kärhana	6	5	8
A_3-kärhana	8	7	10
A_4-kärhana	9	11	8

Bu tablisada bir önümiň birliginiň çykdaýjysy manatda bermek.

Hereketdäki kärhanalarda (a_1+a_2) üçin bu çykdaýjy önümiň özine düşýän gymmatynyň we daşamakda transport çykdaýjylardyr.

a_3 rekonstruksiýa we a_4 gurluşyk üçin önümiň özine düşýän gymmatyndan we transport çykdaýjylardan daşary hem udel kapital düýpli maýa goýum beriji we ýyllyk normatiw srok özine ýapmak degişlidir.

Şonuň üçin hem bu çykdaýjylar a_1 a_2 kärhanadan ýokarydyr.

Kuwwatlylygyň ösüşiniň üç uly ykdysady wariantyny we şonuň bilen bilelikde önümi talap ediji daşamagyň optimal planyny hasaplamagy kesgitlemegi talap edilýär.

Meseläniň şerti boýunça iberijiler 4-obýekt (a_1 a_2 täsiri kuwwatlylyk a_3 a_2-ki rekonstruksiýa etmegiň netijesinde goşulýan kuwwatlylyk a_4 bolsa täze gurmak planlaşdyrylan kärhana) Umumy iberijiniň kuwwatlylygy talapdan 75 müň birlik önüm azdyr.

Bu ýagdaýdan töleg meselesi açykdyr ýapyk modele öwürmek üçin bu şertleri 75 müň talap edijini girizýäris.

Öňden tanyş bolan ýapyk model üçin paýlanyşyk demirgazyk-günbatar buruç usulyny ulanarys we netijede aşakdaky tablisany alarys.

Iberiler	Talap ediji				Öndürilen önüm a_i	a_i setiriň potensialy
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1-kärhana	3 120	3	4	0	120	0
A_2-kärhana	6 35	5 130	8 15	0	180	3
A_3-kärhana	8	7	10 75	0 0	75	5
A_4-kärhana	9	11	8	0 75	75	5
Talap dilen önüm	155	130	90	75	450	-
B_i sütiniň potensialy	3	2	5	-5		

Planyň gowlanma mümkinçiligine derňew etmek üçin koefisiýentleri kesgitlemeli, ýüklenen kletkalar üçin L_i setir we B_j sütin üçin aşakdaky düzgün boýunça taparys. Onuň üçin birinji setiriň koefisiýenti nula deň diýip alarys.

$\lambda_i+\beta_j=c_{11}$ onda $L_i=0$; $c_{11}=3$; $\beta_j=3-0=3$ bolar.

$\lambda_2+\beta_1=c_{21}$ bu ýerden $\lambda_i=c_{21}-\beta_j=6-3=3$

$\lambda_2+\beta_2=c_{22}$ bu ýerden $b_2=c_{22}-\beta_2=5-3=2$

Galan ýüklenen kletkalaryň koefisiýentleri hem şol görnüşde kesgitlenen bolar. Erkin kletkalar üçin tapawutlary aşakdaky ýaly kesgitlener.

Kletka	Tapawut ($S_{P.p}$)
$A_1 B_2$	$S_{12} = c_{12}-(\lambda_i+ \beta_2)=3-(0+2)=1$
$A_1 B_3$	$S_{13} = c_{13}-(\lambda_i+ \beta_3)=4-(0+5)=-1$
$A_1 B_4$	$S_{14} = c_{14}-(\lambda_i+B_4)=0-(0-5)=5$
$A_2 B_4$	$S_{24}= c_{24}-(\lambda_2+ \beta_4)=0-(3-5)=2$
$A_3 B_1$	$S_{31} = c_{31}-(\lambda_3+ \beta_1)=8-(5+3)=0$
$A_3 B_2$	$S_{31} = c_{32}-(\lambda_3+\beta_2)=7-(5+2)=0$
$A_4 B_1$	$S_{41} = c_{41}-(\lambda_4+ \beta_1)=9-(5+3)=1$
$A_4 B_2$	$S_{42} = c_{42}-(L_4+ \beta_2)=11-(5+2)=4$
$A_4 B_3$	$S_{43} = c_{43}-(L_4+B_3)=8-(5+5)=-2$

Erkin kletkalaryň içinden diňe $a_1 b_3$ we a_4 b_3 kletkalar gowlandyrmaga degişli bolup çykdy has hem $a_4 b_3$ kletkadyr. Onda sikliň başlangyjy edip $a_4 a_3$ kabul etjek görnüşi alarys

- +

75	0
	75

\+ -

degişli kletkalara goşmalysyny goşup aýyrmalysyndan aýryp aşakdaky täze plany alarys.

Iberiji	Talap ediji	a_i	L_i			
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	3 120	3	4	0	120	0
A_2	6 35	5 130	8 15	0	180	3
A_3	8	7	10	0 75	75	3
A_4	9	11	8 75	0 0	75	5
b_j	155	130	90	75	450	-
β_j	3	2	5	-3	-	-

Erkin kletkalar üçin koefisiýentler aşakdaky bahalara eýe bolarlar.

kletka	Tapawut ($S_{P.q}$)	kletka	Tapawut ($S_{P.q}$)
A_1B_2	3-(0+2)=1	A_1B_2	7-(3+2)=2
A_1B_3	4-(0+5)=-1	A_3B_2	10-(3+5)=2
A_1B_4	0-(0-3)=3	A_4B_1	9-(3+3)=3
A_2B_4	0-(3-3)=0	A_4B_2	11-(3+2)=6
A_3B_1	8-(3+3)=2	A_4B_2	

Ýeketäk erbet kletka ol hem A_1B_3 kletkadyr. Onuň üçin hem şekili aşakdaky ýoly gurnamak bolar.

+

120	
35	75

\+ -

Şekil boýunça üýtgeşme girizip aşakdaky täze gowylandyrylan plany alarys.

Iberiji	Talap ediji				a_i	L_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	3 105	3	4	0	120	0
A_2	6 50	5 130	8	0	180	3
A_3	8	7	10	0 75	75	4
A_4	9	11	8 75	0 0	75	4
b_j	155	130	75	75	450	-
β_j	3	2	4	-4	-	-

Soňky alynan plan boýunça erkin kletkalaryň tapawutlarynyň içinden otrisatel baha eýe bolany ýokdyr olaryň ählisi hem položiteldir. Bu bolsa soňky gowylandyrylan planyň optimaldygyna şaýatlyk edýändir. Optimal plandan görnüşi ýaly a_2 kärhanany rekonstruksiýa etmeklik kuwwatlylyga täsir edip bilmejekdigi görünýär diňe täze kärhananyň guramalydygy edip çykdy.

§ 3.4. Iň kiçi elementler usuly bilen bazis çözüwi gurmak.

Ulag meselesini çözülende ilkinji bazis ýada daýanç çözüwin (planyny) demirgazyk günbatar burçy usulynda kesgitlemek arkalay aňladylan hususan heniz optimal çözüwden daşda. Sebäbi ýük iberijileri (punktlaryň) we ýük kabul ediji (punktlar) tertip nomerleriniň köp mukdary we optimalygyň kriteriýasyny hasaba almaklygy göz öňünde tutylanda birinji daýanç plan optimal bolmagy mümkin däldir.

Köplenç ýagdaýlarda birinji we kabul ediji (punktlaryň) başlangyç nomerasiýasy ulag meselesiniň optimallyk kriteriýasyna goşulmaýar.Kriteriýa optimallygy hasaba almak bilen bazis ýa-da daýanç çözüwini düzmegiň usulyna seredeliň.bu usuly minimal elementler usuly diýlip atlandyrylýar.bu usulda ilkinji daýanç çözüwi almak üçin tablisanyň iň kiçi elementli kletkasyndan dolduryp başlanýar.Doldurylan kletkalar taşlanyp ýene doldurmany indiki iň kiçi elementli kletkalardan başlanýar bu proses ähli ýüki dagadylýança dowam etdirilýär.

Tablisa 2

Iberiji	Kabul ediji				Bar bolan a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	6	5	1 100	100
A_2	1 300	4	3	2	400
A_3	4	3	1 100	2	600
Talap b_l	300	500	100	200	

Tablisa 3

Iberiji	Kabul ediji				Bar bolan a_i
		B_2		B_4	
		6			
A_2		4		2 100	100
A_3		3 500		2	500
Talap b_l		500		100	

Netijede aşakdaky tablisany alarys.

Tablisa 4

Iberiji	Kabul ediji				Bar bolan a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	6	5	1 100	100
A_2	1 300	4	3	2 100	400
A_3	4	3 500	1 100	2	600
Talap b_l	300	500	100	200	1100

Setirler we sütinler boýunça deňligiň ýerine ýetýänligini aňsat barlamak bolar. Netijede alnan çözüw boýunça x_{14}=100, x_{21}=300, x_{24}=100, x_{32}=500, x_{33}=100, x_{11}=x_{12}= x_{13}=x_{22}=x_{23}= x_{31}= x_{34}=0, daýanç çözüwidir. Mundan başga eger işlenen potensiallar usulyny ulanyp daýanç çözüwiniň optimaldygyny hem görkezmek kyn däldir.

§3.5. Bir jynsly däl ýükleri daşamak .

Öňki temalarymyzda biz ulag meselesiniň goýulşyna we çözilişine seredipdik ol ýerde diňe bir jynysly ýükleri daşamak gözeginde tutylýardy. Durmyşda şol bir wagtda birnäçe görnüşli ýükleri (önümleri) daşamagyň hem planyny gurmak zerurlygy hem çykýar. Şonuň üçin bir jynsly däl ýükleri daşamagyň ulag meselesiniň matematiki modelini gurmaga seredeliň.

Goý m iberiji punktlar (a_1 a_2, ... a_m) olaryň her birinde hem t görnüşli önümler bar diýeliň we n talap ediji punktlar (b_1 b_2, ... b_n) bularyň hem her-birine talap eden mukdarda t görnüşli önümleri ertmeli.

a_i (i=1,2;m) iberiji punkta seredeliň. Bu punktda anyk t görnüşli önümleri (bir jynsly önümlerden tapawudyňlaýyklykda) aşakdaky

r-komponenti bar bolan bentor ulylygy görnüşde aňlatmak bolar.

$$\vec{a}_i = \begin{Bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{Bmatrix}$$

Eger käbir önüm görnüşleri punktda ýok bolan ýagdaýynda onda degişli komponent nula deň bolar. (Mysal üçin t-nji görnüşli önüm) ($a_{it=0}$). Şonuň üçin a_i wektorlaryň r ölçegi meselede hasap alynýan dürli görnüşli önümleriň görnüşlerine deňdir. Edil şonuň ýaly hem talap ediji punktyň b_j (j=1,2, ...n) her bir wektory ýaly häsiýetlenilýändir.

$$b_i = \begin{Bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{ir} \end{Bmatrix}$$

Bu ýerde b_{it} (t=1,2, ...r) b_j talap ediji punktyň t-nji önümden talap edýän mukdarydyr egerde şol önüm talap edilmeýän bolsa onda $b_{jt}=0$

Edil bir jenysly günde bolşy ýaly hem bir jynsly günler daşalanda hem ýükiň bir ölçeg birligine düşýän ulag çykdaýjysy häsiýetlendirilýändir.

Goý C_{ijt}-görnüşli önüm bir ölçeg brligini a_i punktdan β_j-punkta daşmagyň gymmatyny aňladýar.

x_{ijt} üsti bilen bolsa a_i punktdan β_j punkta daşamaly t görnüşli önümiň mukdaryny aňladylýar.

Bu ýerde i=1,2, ..., m; j=1,2, ..., n; t=1,2, ..., r;

x_{ijt}-näbeliler sistemanyň meseläni dolandyrmaly parametr birinji toplumy bolup durýar.

Meseläniň ähli şertleri anyk matematiki aňladylandyr indi matematiki modeli düzmäge girişip bileris.

Meseläniň maksady minimal ulag çykdaýjysy bolar ýaly edip önümleri daşamagy planlaşdyrmak bolup durýar. Maksat funksiýalaryň modeli aşakdaky ýaly bolup gelip çykýar.

$$S(x)=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{r} x_{ijt}\, c_{ijt} \rightarrow \min \qquad (1)$$

Indi dolandyrmaga degişli parametrler boýunça çäklendirmelerini alarys

$\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ijt}$ - A_i iberiji punktdan t-görnüşli önümiň iberilmeli mukdary.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} \le a_{it} \qquad (2$$

Talap edilýän her-bir önümiň mukdary A_i punktda bar bolan şol görnüşli önümden az ýa-da kän bolmalylygy.

$\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ijt}$ –t-e görnüşli önümden b_j punkta ähli iberiji punktlardan

iberilmeli mukdary meseläniň şertine gara iberiljek t görnüşli önüm aşakdaky gatnaşygy eýedir.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt} \qquad (3)$$

Fiziki ýük many tarapdan düşünlişine göz (4) çäklendirme $x_{ijt} \ge 0$ gelip çykýar. i=1,2, ...m; j=1,2, ...n; t=1,2, ...r;

Şeýlelik bilen gözlenilýän modell aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$S(x)=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{r} x_{ijt}\, c_{ijt} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} \leq a_{it}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt}\,, \quad x_{ijt} \geq 0$$

Amaly ýagdaýda gurulmaly modeliň ölçegleri hemme taraplaýyn örän manyly bolup biler. Eger mysal edip n talap ediji punktlaryň sany 60 deň m iberiji punktlaryň sany 40, önümleriň görnüşiniň t sany 20-ä deňe bolsa onda meseläniň umumy üýtgeýänleriniň sany mnt = 48000, çäklendirmeleriň sany bolsa -nt+mt=2000

Bu ölçegler boýunça düzilen san modelini derňemek üçin kompiýuteriň kömegi bilen ýörite algoritimler ulanýar.

4.Ykdysady korrelýasion modeller.

§4.1. Funksional we korrelýasion baglanyşyk . Çyzykly korrelýasion baglanyşyk.

Gurulan ykdysady-statistiki model gorkezijileriň özara ykdysady şertleşilen baglanyşygyny san taýdan häsiýetlendirmäge mümkinçilik berýär.

Bu iki ýa-da birnäçe faktorlaryň özara baglanyşygy hem iki görnüşli baglanyşyk ýaly biri-birinden tapawutlanýarlar olar funksional we korrelýasion baglanyşyklardyr.

Funksional baglanyşygy aşakdaky ýaly düşindirmek bolar. Funksional baglanyşyk her bir gözegçilik, her bir aýratyn ýagdaý üçin takyk we kesgitli ýüze çykýar. Omuň kanuny naprəženiýa bilen togyň zynjyr uçastogy üçin garşylygyň we togyň güýjüniň arasyndaky özara funksional baglanyşygy gurnaýar. Bu kanun zynjyry nähili materiallardanygy onuň kese-kesiginiň meýdanynyň we uzynlygynyň netijelilige laýyklygy saklanýandyr.

Beýle mysallary ahli takyk ylymlarda (fizika, himiýa, astronomiýa) ulanylýan funksional baglanyşygy aýtmak bolar. Korrelýasion baglanyşyk funksional baglanyşykdan tapawutlylykda umumy, ortaça we köpçülikli gözegçilikde ýüze çykýandyr.

Goý adamyň boýy bilen onuň agramynyň arasyndaky baglanyşyk öwrenýär diýeliň. Hakykatdan hem beýle baglanyşyk bardyr çak bilen 100 adam alalyň we olary boýly-boýyna goýalyň. Olaryň boýlarynyň ölçeginiň ulalmagy bilen umuman olaryň agramlaryhem ulalmalydyr. Ýöne berlen ýagdaýda umumy kanuna laýyklyk bozulyp hem biliner.

Ýagny 100 adamyň içinden käbiriniň agramy has agyr bolup boýy kiçi we tersine bolup hem biler. Beýle ýagdaý doly düşnükli. Ýagny boýuň uzynlygyndan başga hem agrama täsir edilýän sebäpler bardyr (adamyň ýaşy, durmuş ýagdaýy, saglygy we beýlekiler). Egerde adamyň agramy üýtgemegi kanunalaýyklykly onuň boýuny hasaba alnyp kesgitleýan matematiki formula saýlanylsa onda haýsy hem bolsa bir anyk alnan adamynyň agramyna görä kesgitläp bolmajakdygy düşnükli.

Şeýle hem bolsa görkezilýän baglanyşygy öwrenmeklige we degişli matematiki formulany almaklyga uly gyzyklanma döreýär.

Ykdysady ululyklar her biri obýektiw täsir edip dürli faktorlar köpliginiň täsirine jemlenendi ýagny adamyň erkine bagly däl, emma beýleki biri adamyň aňly maksada okgunly täsiriniň netijesinde bolýar. Käwagtlar täsinlik hem bolmagy mümkin (tötän täsin bolmagy). Ykdysady sferada kanuna laýyklykda jansyz tebigat sferadaky ýaly takyklyk we üýtgemezlik ýüze çykmaýar. Şonuň üçin hem ykdysady görkezijileriň özara baglanyşygyny öwrenmeklikde ählisinden öňürti korrelýasion derňewe ýüzlenilýär. Iň ýönekeý ýagdaýda iki görkezijiniň özara baglanyşygynyň korrelýasion derňewi öwrenilýär. Bu seredilýän görkezijileriň biri bagly däl üýtgeýän ikinjisi bolsa bagly üýtgeýän bolyp hyzmat edýär. Olar degişlilikde yny x we y bilen şertli belgilenýärler. Bu görkezijileriň arasyndaky baglanyşygyň anyk özi ýogsamda matematiki ýol bilen dälde seredilýän hadysaň içki manysynyň açmaklygyň we onuň bolmazlygynyň sebäbiniň netijesini hil taýdan derňemegi gurnaýar. Korrelýasion derňewiň özi baglanyşygyň mukdar ýagdaý ölçegini ýüze çykarmak üçin niýetlenen hem bolsa oňa hil taýdan anyklanan netije çykarmak mümkinçiligi hem nätakyk däldir. Şeýlelikde heniz matematiki hasaplama çenli bagly däl görkeziji x we y bagly üýtgeýäni häsiýetlendirýän $y=f(x)$ funksiýa bardyr. Korrelýasion baglanyşygyň ilkinji meselesini biri hem şol funksiýanyň görnüşini kesgitlemekdir (gurnamakdyr). Başgaça aýdanyňda öwrenilýän baglanyşygy has gowy häsiýetlendirýän korrelýasion derňemäni (başgaça regressiýa deňleme) gözlemek.

Regressiýa deňlemesi korrelýasion modelliň iň wajyp düzüm bölegi bolup durýar we onuň dogry saýlanmagy we hasaplanmagy korrelýasion modelli gowandirjak iň uly wajypkärli etabyna(tapgyryna) degişlidir.

Iki üýtgeýäniň özara baglanyşygyny häsiýetlendirip biljek iň ýönekeý deňleme çyzyk deňlemäniň aşakdaky görnüşidir.

$$Y=a_o+a_1\, x_a$$

Bu ýerde x - bagly däl we y- bagly üýtgeýänlerdir.

a_o we a_1 hemişelik koefisiýentler. Korrelýasion baglanyşyk näçe ýeterlik takyklykda we ýagdaýlaryň toplumynyň doly ýüze çykmasynyň gözegçiligiň mukdarynyň esasynda gurulan model balansa ýeterlik ýokarydyr. Amaly hasaplamalar üçin 20-25-den az bolmadyk gözegçilik zerurdyr. x we y-yň az sanynda barlagyň ynamly we ynandyryjy netijelerine garaşmak kyndyr. Göni çyzykly saklanyşygynyň häsiýet boýunça netije çykarsak ol ilkibaşda bagly we bagy däl üýtgeýänleriň berlen bahalaryny üçin ýönekeý gabatlaşdyrma ýoly ulanylýan şeýle hem grafiki we ş.m.

Grafiki usulda her bir gözegçilik göniburçly koordinat sistemasynda nokat görnüşinde bellenilýär obsisa boýunça x-yň bahalary ordinata boýunça bolsa y-ň bahalary aňladylýar. Ýeterlik köp sanly gözegçilikleriň grafikda ýerleşen nokatlary öwrenilýän üýtgeýänleriň çyzykly baglanyşygynyň dogrulygy ýa-da (ýalňyşlaryň) nädogrylygyny häsiýetlendirmäge aňsat göz ýetirmek mümkinçilik berýär.

Indiki etapda x we y-yň özara çyzykly baglanyşygyň anyk deňlemesini ýüze çykarylýar. Munyň üçin hökmany (фактически) anyk berlenleriň iň gowy häsiýetli degişliligi bolar ýaly görnüşli deňlemesiniň hemişelik ululyklaryny ($a_o$we a_1) san bahalaryny kesgitlemeli. Iň gowy gönini gözlemegiň kriteriýasy belenen ölçegde şertlenýär. Munyň ýaly kriteriýany göniniň deňlemesi boýunça hasaplanan y-ň (faktiçeskiý bahasynyň) anyk bahasynyň gyşarmasynyň kwadratynyň jeminiň minimumyny almak kabul edilendir. Gyşarmasynyň kwadratynyň alynmagyny gyşarmanyň birinji derejesiniň položitel we otrisatel hem bolmagy mümkin bularyň jemi bolsa nula deň bolup biler. Gyşarmanyň kwadratynyň minimumyna bolsa ýeke-täk göni degişlidir koefisiýentleri iň kiçi kwadratlar diýip atlandyrylan usulda gözlenilýär.

Şeýlelikde eger x bagly däl üýtgeýän we y bagly üýtgeýänler

$y= a_o+a_1 x$ göni görnüşde häsiýetlendirilýän bolsa onda korrelýasion hasaplamanyň ilkinji meselesi gözegçiligiň edilýän y-ň bahasynyň kwadratynyň gyşarmasyny minimumyna üpjün etjek $a_o$we a_1 koefisiýentleri ýüze çykarmakdan durýandyr.

Ýagny, $$\sum (y_{fakt}-y_{hasap})^2 =min$$

Göniniň deňlemesini indiki görnüşde ýazmak mümkin

$$Y_{hasap}= a_o+a_1 x_{fakt}$$

Y_{hasap} –bahasynyň kwadratlar jemini minizirlemegiň şertinde ýerine goýup alarys.

$$\sum (y_{fakt}-a_0 – a_1 y_{fakt})^2 =min$$

x_{fakt} we y_{fakt}-belli ululyklar emma a_o we a_1 näbeliler (gözlenilýän) ulylyklar bolanda kwadratlaryň jemini aňladýan funksiýa seredeliň.

Funksiýanyň minimum nokady onuň birinji praizwodnysynyň nula deň bolan ýagdaýyndadyr.

Şonuň üçin göniniň gözlenilýän koefisiýentleri hasaplananda funksiýadan $a_o$we a_1 boýunça alynan hususy proizwodnylary nula deňläp çözmelidir.

Minimumy gözlenilýän funksiýany f bilen belläp we x we y-ň bolsa ýazgylaryny düşirip alarys.

$$\frac{df}{dao} = -2\sum(y - a_o - a_1) = 0$$

$$\frac{df}{da_1} = -2\sum(y - a_o - a_1 x)x = 0$$

Degişli özgertmeden soňra alarys.

$$\sum y = Na_o + a_1 \sum x \qquad (1)$$
$$\sum x\, y = a_o \sum x + a_1 \sum x_2$$

Bu a_o we a_1 koefisiýentleriň bahasynyň kesgitlemek üçin niýetlenen normal deňlemeleriň sistemasydyr.

Ykdysady görkezijileriň özara baglanyşygyny häsiýetlendirilýän deňlemäni hasaplamak üçin aşakdaky meselä seredeliň. Aşakdaky 1-nji tablisada 25 kärhana baglanyşykly önümleriň doly özine düşýän gymmatlaryhakda berlenler girizilendir. Bu görkezijiler biziň mysalymyzda derňelýän obýekt bolup hyzmat edýär.

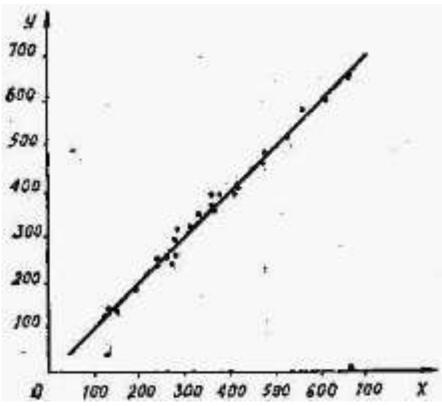
Kärhananyň işçi saklary we önümçilik çykdaýjylary arasyndaky baglanyşygyň 25 etrabyň ýyllyk hasabatynyň berlenleriň baglylygy.

Tablisa 1

Kärhanalaryň aragatnaşygy	Işgärleriň ortaça ýyllyk sany x	Önümçiligiň umumy çykdaýjylarnyň jemi y	Göniniň deňlemesi boýunça hasaplanan y bahasy	y-yň hakyky bahasynyň deňleme boýunça hasaplan bahasyny tapmaly	Orta arifmetiki bahasynyň y-yň hakyky bahasyny tapmaly
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Kärhana №1	123	117	116,2	+0,8	-230,52
№2	133	129	126,4	+2,6	-218,52
№3	147	135	140,7	-5,7	-212,52
№4	193	186	187,6	-1,6	-161,52
№5	243	243	238,7	+4,3	-104,52
№6	247	229	242,8	-13,8	-118,52
№7	267	250	263,2	-13,2	-97,52
№8	272	239	268,3	-29,3	-108,52
№9	277	254	273,4	-19,4	-93,52
№10	278	288	274,4	+13,6	-59,52
№11	284	316	280,5	+35,5	-31,52
№12	318	320	315,2	+4,8	-27,52

1	2	3	4	5	6
№13	338	345	335,6	+9,4	-2,52
№14	360	389	358,1	+30,9	+41,48
№15	367	370	365,3	+4,7	+22,48
№16	370	356	368,3	-12,3	+8,48
№17	382	395	380,6	+14,4	+47,48
№18	415	396	414,2	-18,2	+48,48
№19	420	418	419,3	-1,3	+70,48
№20	468	464	468,3	-4,3	+116,48
№21	481	484	481,6	+2,4	+136,48
№22	523	524	524,4	-0,5	+176,48
№23	565	580	567,3	+12,7	+232,48
№24	613	605	616,3	-11,3	+257,48
№25	657	656	661,2	-5,2	+308,48
Jemi	8741	8688	-	0.0	0.0

25 kärhananyň işçi sany we olaryň umumy önümçilik çykdaýjysynyň ählisiniň degişlilikde emele getirýän nokatlaryň göniçyzykly baglanyşyga görä ýerleşdirilişiniň jebisligi aşakdaky grafikda görkezýär.



Seredilýän mesele üçin degişli deňlemäniň a_o we a_1 koefisiýentini tapmak üçin (1) normal deňlemeler sistemasyny çözmeli.

Onuň üçin $\sum x$ tablisa boýunça 8741-e deňdir

$\sum y$- bolsa 8688 deňdir

$\sum x^2$ –hem tapyp alarys

$$8688=25\,a_o+8741\,a_1$$

$$3545102=8741a_o+3553339a_1$$

Sisremany çözüp alarys

$$a_o=-9{,}36$$

$$a_1=1{,}0207$$

Şeýlelikde y=-9,36 +1,0207 x

Tapylan deňleme grafikda görkezilen göni çyzykly baglanyşygyň deňlemesidir.

§ 4.2. Korelýasiýa koefisiýenti.

Korelýasiýon baglanşygy jebisligine baha bermeklige gerek. Nazary we amaly ýagdaý üçin iň bir wajyp çyzykly baglanyşygyň

y_x-y=b_{yx} (x-x) (1) görnüşine seredeliň

Regresiýa koefisiýenti b_{yx} y-yň x görä jebislik baglanyşygynyň ölçegji bolup görünmek bilen belli boluşy ýaly haçanda y-ortaça näçe üýtgeşmeligine x-bir bllik üýtgände görkezýär.

Iki korelýasion baglanyşykda b_{yx} –yň bahasy bir meňzeş bolmagy mümkin ýagny bir meňzeş burç koefisiýenti regresiýa görnüşi ýöne dürli derejede jebitlik baglanşykly.

Munuň belegine aşakdaky grafikler boýunça göz ýetirmek bolar.

grafik 1

Ikinjiden regresiva koefisiventi $b_{y\,x}$ näbelileriň ölçeg birligine hem baglydyr.

$b_{y\,x}$ –dolanşygyň jebislik görkezijisi üçin ölçeg birligiň standart sistemasy gerekdir.

Bu sistema üýtgeýänleriň ölçeg birliginiň onuň S kwadratlarynyň ortaça gyşarmasyna ölçeg birligi hasabynda hem ulanylýar.

(1)-ä ekwiwalent bolan deňlemäni alarys.

$$\frac{y_x - \bar{y}}{S_y} = \left(b_{yx} \frac{y_x - \bar{y}}{S_y} \right) \frac{\bar{x}}{S_x} \qquad (2)$$

Bu sistemada

$$r = b_{yx} \frac{Sx}{Sy} \qquad (3)$$

Ululyk hacanda X bir S_X ulalanda y ortaça näçe S_y ululykça üýtgeýändigini görkezýär. r-ululyk jebisligiň baglanyşygynyň görkezjisi bolýar we oňa korelýasi koefisiýenti diýip atlandyrylýar.

Eger $r \geq 0$ ($b_{y\,x} \geq 0$, $b_{y\,x} \geq 0$) onda üýtgeýändir özara korrelýasiýon baglanyşygy gönümen diýilýär, eger $r \leq 0$ ($b_{y\,x} \leq 0$, $b_{y\,x} \leq 0$) tersine baglanyşyk diýilýär .

$$b_{yx} - b_1 = \frac{\bar{x}_y - \bar{x}_y}{\overline{x^2} - \overline{x^2}} = \frac{\overline{x_y} - \overline{x_y}}{Sx^2} = \frac{\mu}{Sx^2} \qquad (4)$$

(4) -formulany gözeginde tutyp r üçin alarys.

$$R = \frac{xy - xy}{SxSy} \qquad (5)$$

Mundan görnüşi ýaly r formula iki otnositel simmetrik üýtgeýän üçindir, başgada aýdylanda x we y ýerine çalşyp bilerler. Onda (5) –ni aşakdaky görnüşde hem ýazyp bolar.

$$R = bxy\frac{Sy}{Sx} \qquad (6)$$

(3) we (b) deňlik iki tarapyny degişlilikde köpeldip alarys.

$$r^2 = b\,xy\;b\,xy \qquad (7)$$

Ýada $r = \pm\sqrt{bxy\,bxy}$ (8)

Başgaça x we y üýtgeýänleriň r korrelýasion koefisiýenti regrassionyň ortaça geometrik koefisiýentidir. Formulanyň r üçin beýleki bir modefikasiýasyny bellemek bolar.

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}(xi - \bar{x})(y_1 - y)n_{ij}}{nSxSy} \qquad (9)$$

$$r = \frac{n\sum_{j=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j n_{ij} - (\sum_{j=1}^{e}x_i n_i)(\sum_{j=1}^{m}y_i n_j)}{\sqrt{n\sum_{j=1}^{e}x_i^2 n_i - (\sum_{j=1}^{l}x_i n_i)^2} \bullet \sqrt{n\sum_{j=1}^{m}y_j^2 n_i - (\sum_{j=1}^{m}y_i n_i)^2}} \qquad (10)$$

Amaly hasaplamalar üçin (10) formula has amatlydyr.

Korrelýasiýa koefisiýentiniň esasy kofisiýentleri aşakdakylardan ybaratdyr.

1. Korrelýasiýa kofisiýenti [-1;1] aralygyndaky bahalary alyp berýär.

Ýagny $-1 \leq r \leq 1$ (11)

2. Eger üýtgeýänleriň ähli bahasy şol bir sanda ulalsa (kiçelse) ýa-da şonça gezek ulalsa (kiçelse) onda korrelýasiýa koefisiýentiniň ululygy üýtgemeýär.
3. $R = \pm\ 1$ bolanda korrelýasion baglanyşyk çyzykly funksional baglanyşygy aňladýar.
4. r=0 bolanda çyzykly korrelýasiýa baglanyşyk düşip galýar.

Aşakdaky mysala seredeliň.

Esasy önümçilik fondy mln manat x	Ortaça aralyklar						Ähli nj	Toparlaryň ortaça, T yi
		7-11	11-15	15-19	19-23	23-27		
	yi / xi	9	13	17	21	25		
20-25	22,5	2	1	-	-	-	3	10,3
25-30	27,5	3	6	4	-	-13	13,3	
30-35	32,5	-	3	11	7	-	21	17,8
35-40	37-5	-	1	2	6	2	11	20,3
40-45	42,5	-	-	-	1	1	2	23,0
Ähli nj		5	11	17	14	3	50	-
Toparlaryň ortaça x_j mln, manat		25,5	29,3	31,9	35,4	39,2	-	-

x-esasy onumcilik fondy we y-sutgada ondurilyan onumin arasyndaky baglansygyn korrelýasiýa kofisiýentini hasaplamaly,onun ucin asakdaky formaladan peydalanalyn

$$r = \sqrt{b_{xy} b_{yx}}$$

$$r = \sqrt{0{,}6762 * 0{,}8099} = 0{,}740.$$

§4.3. Korrelýasion derňewiň esasy düzgüni.

Korrelýasion derňew (korrelýasion model) – usul haçanda berlen gözegçilik ýa-da (eksperment) barlygy tötän diýip hasap edip bolýan bolsa we ol köpölçegli normal kunun boýunça paýlama toplumynda seçilen bolmagyna ulanarlyklydyr.

Korrelýasion derňewiň esasy meselesi –bir üýtgeýäniňbeýlekisi boýunça regresiýa deňlemesiniň bahasyndan durýandyr.

Iki ölçegli ýönekeý korrelýasion modeliň derňewine seredeliň.Öňden beli bolşy ýaly iki üýtgeýjiniň özara normal paýlanşygyň depynlylygy aşakdaky görnüşe eýedir.

$$f_N = (x,y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_x\, \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}}\; e^{-L\,(x,y)}$$

Bu ýerde

$$L(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\left[\left(\frac{x-\alpha_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\alpha_x}{\sigma_x} X \frac{y-\alpha_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\alpha_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

a_x, a_y – x we y üýtgeýänleriň matematiki garaşmasy.
σ_x σ_y - x we y üýtgeýänleriň dispersiýasy.
ρ - aşakdaky formula boýunça korrelýasiýa momentiniň (egni) üsti bilen kesgitlenýä, üýtgeýänleriň arasyndaky korrelýasiya koýefisenti

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M[(X-a_x)(Y-a_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (2)$$

ρ ululygy – baş toplumynda x we y tötän üýtgeýänleriň özara baglanşygynyň jebisligini häsiýetlendirýär. Ähtimalyklar teoriýasynda x we y tötän ululyklaryň özara normal kanunda paýlanşygy.

Şertli matematiki garyşmalaryň üçin aňladylýar başgaça regresiýa deňlemesiniň moduly çyzykly funksiýa bilen aňladylýar.

$$M_x(Y) = a_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x) \qquad (3)$$

$$M_y(X) = a_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y) \qquad (4)$$

Bu ýerden wajyp netije gelip çykýar:
ρ – korreliýasiýa koefisienti iki üýtgeýäniň çyzykly ýagdaýda özara baglanşygnyň jebislik baglylygnyň görkezjisi bolýar. Baş korrelýasiýa koefisiýentine we seçme boýunça (2) – (4) formulalarda a_x, a_y, $\sigma_x{}^2$, $\sigma_y{}^2$, K_{xy} parametrleri hökman çalyşmaly degişlilikde olaryň orta bahalary

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{e} x_i n_i}{n}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j n_j}{n}$$

dispersiýasyny $S_x^2 = \overline{x}^2 - \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{e} x^2{}_i n_i}{n} - (\overline{x})^2$

$$S_x^2 = \overline{y}^2 - \overline{y^2} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y^2{}_j n_j - (\overline{y})^2}{n}$$

$$\mu = \overline{xy} - \overline{x}\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{e}\sum_{j=1}^{m} x_i y_i n_{ij}}{n} - \overline{x}\overline{y}$$

Seredilýän üýtgeýänleriň özara karrelýasiýa baglanşygyň jebisligine amaly (praktiki) barlaglarda baş karrelýasion koeffisientiň ululygy ρ boýunça dälde anyk bahalar boýunça seçmäniň r-*i* görnüşlidir.

Şeýle hem r baş toplumynyň seçmesinde tötän düşen üýtgeýänleriň bahasy boýunça hasaplanýar.

ρ - dan tapawutlylykda r-tötän ululykdyr.

Goý hasaplanan r-iň bahasy $r \neq 0$.

Şeýle sorag ýüze çykýar baş toplumyň x we y üýtgeýänleriň özara çyzykly korrelýasion baglanşygnyň hakykatdan hem barmy ýa-da seçmede üýtgeýänleriň saýlamasynyň tötänleýin gelip çykýarmy.

Ýörgit boýunça bular ýaly ýagdaýlar. H_0 çyzykly korrelýasion baglanşyklaryň düşip galma gipotezasy bilen barlanylýar. H_0 gipotezasynyň düzuminde gaýtarýar ýa-da kabul edýän. Statistiki kriterýa diýip atlandyrylýar. α kritiýa momulygynyň derejesi başgaça H_0 gipotezanyň gataryna ähtimalygy haçanda statistiki däl gözýetimde çyndyr.

H_0 : $\rho = 0$ gipotezanyň barlagyna gaýdyp gelsek. Bu gipotezanyň (справедливость) deňligi statistiki kriyeriýadan durýar.

$$t = \frac{r}{S_r} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (5)$$

Bu ýerde S_r – ortaça kwadrat gyşarma (standart ýalňyşlyk) r:

$$S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}} \qquad (6)$$

(n – 2) erkin derejeli Stýudentiň t-paýlanşy diýen belli (teoriýasy) nazerýeti bardyr. Şonuň üçin hem saýlama korrelýasiýa koeffisentiniň makulylygy nuldan tapawutlanýar.

Eger-de $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > t_\alpha; n-2,$ bolýan bolsa

Bu ýerde t_α; $n-2$ - $(n-2)$ erkin derejeli sanda α kesgitli kranly derejesine (уроне) Стýdentiň t – kriteriýasynyň tablisa boýunça bahasy (табличное значение).

Korrelýasiýa koeffisiýentiniň maksadalaýyk manylylygny bolmagy üçin näbelli baş korrelýasiýa koeffisenti ρ $\gamma = 1-\alpha$ (надежностью) ynamlylykda dörän bahaberilýän aralygy tapmalydyr. (доверительный интервал)

Aşakdaky mysala seredeliň

Öňden hasaplanan $r = 0{,}740; b_{yx} = 0{,}6762; b_{xy} = 0{,}8099;\ S_x^2 = 21{,}84; S_y^2 = 18{,}2336;$

$\alpha = 0{,}05$ manylyk derejesinde

$$t = \frac{0{,}740\sqrt{50-2}}{\sqrt{1-0{,}740^2}} = 7{,}62$$

Studentiň paýlanyş tablisasy boýunça α = 0,05 üçin we f = 50-2 = 48 erkin derejelilik sanda statistikanyň kiritiki bahasyny alarys. $t_{0,05;48} = 2{,}01$

Bu ýerde b_{yx} we b_{xy} regresiýa koýefisentleriň manylylygy gelip çykýar. Şeýle hem 9 boş korrelýasiýa koýefisenti üçin ynamlylyk aralygyny gurarys. Onuň üçin Fişeriň z-özgertmesini ulanarys.

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}740}{1-0{,}740} = 0{,}9505$$

$\Phi\,(t\alpha) = \gamma = 1-\alpha$ şertden

$\Phi\,(t\alpha) = 0{,}95$

Laplasyň tablisasyndan $t_{0,95} = 1{,}96$

$$Z - t_\alpha \frac{1}{\sqrt{n-3}} \le M(Z) \le Z + t_\alpha \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

M (Z) üçin ynamlylyk aralygy gurarys.

$$0{,}9505 - 1{,}96\frac{1}{\sqrt{50-3}} \le M(Z) \le 0{,}9505 + 1{,}96\frac{1}{\sqrt{50-3}}$$ ýa-da $0{,}6646 \le M\,(Z) \le 1{,}2364$

S üçin ýörite tablisany ýa-da $r = \tan\ hz = \dfrac{l^z - l^{-z}}{l^z + l^{-z}}$ şu formulany ulanyp ynamlylyk aralygyň çäklerini taparys.

$0{,}581 \le \rho \le 0{,}844$

Indi β_{yx} we β_{xy} regresiýa koýefisentleri üçin ynamlylyk aralyklary gurarys. Başda üýtgeýänleriň ortala kwadratik gyşarmalary kesgitläliň.

$$S_x = \sqrt{S^2{}_x} = \sqrt{21{,}84} = 4{,}673$$

$$S_y = \sqrt{S^2} = \sqrt{18{,}2336} = 4{,}270$$

Indi bolsa aşakdaky formulalar boýunça alarys

$$b_{yx} - t_{\alpha,} n-2 \cdot \frac{S_y\sqrt{1-r^2}}{S_x\sqrt{n-2}} \le \beta_{y_x} \le b_{yx} + t_{\alpha,n-2} \cdot \frac{S_y\sqrt{1-r^2}}{S_x\sqrt{n-2}}$$

$$b_{xy} - t_{\alpha}, n-2 \cdot \frac{S_x\sqrt{1-r^2}}{S_y\sqrt{n-2}} \le \beta_{xy} \le b_{xy} + t_{\alpha, n-2} \cdot \frac{S_x\sqrt{1-r^2}}{S_y\sqrt{n-2}}$$

$$0{,}6762 - 2{,}01 \cdot \frac{4{,}270 \cdot \sqrt{1-0{,}740^2}}{4{,}673 \cdot \sqrt{50-2}} \le \beta_{yx} \le 0{,}6762 + 2{,}01 \frac{4{,}270 \cdot \sqrt{1-0{,}740^2}}{4{,}673 \cdot \sqrt{50-2}}$$

Ýa-da $0{,}4979 \le \beta_{yx} \le 0{,}8545$ edil şunuň ýaly hem $0{,}5963 \le \beta_{xy} \le 1{,}0235$

§4.4. Korrelýasiýa indeksi we korrelýasiýa gatnaşyk.

Öňde girizilen korrelýasiýa koefisiýenti özara normal kanun boýunça paýlanan täsin üýtgeýänleriň özara çyzykly baglanyşygynyň jebislik baglylygynyň patensial görkezijisi bolýandyr . Kähalatlarda islendik (formada) görnüşdäki baglanyşygyň işjeňlik görkezijisiniň baglylygynyň ynamlylyk zerurlygy ýüze çykýar.

Şeýle görkezijini almak üçin saýlanan (выборочтую) dispersiýasyna seredeliň.

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2 n_i}{n} \qquad (1)$$

Umumy dispersiýa diýip atlandyrylan. Eger ý üýtgeýän gözegçilikleriň hatary özara iki gogulyjylar görnüşinde berilip biliner.

$$S_y^2 = S_{iy}'^2 + \delta_{iy}^2 \qquad (2)$$

Bu ýerde $S_{iy}'^2$ – ortaça toparlaýyn dispersiýa

S_{iy}^2 ýada galyndy dispersiýa

$$S_{iy}'^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} S_{iy}^2 ni}{n} \qquad (3)$$

$$S_{iy}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} (y_j - \bar{y})^2 n_j}{n_i} \qquad (4)$$

δ_{iy}^2 – toparara dispersiýa:

$$\delta_{iy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{l} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 n_i}{n} \qquad (5)$$

(5) - galyndy dispersiýa Y yrgyldylygyň jübit däl faktorynyň üýtgeýjiliginiň X-a baglyda däl ýüze çykma bölegini ölçeýändir.

X-a baglyda

Toparara dispersiýa γ barýasiýanyň x bilen ýertlenen üýtgemesiniň bölegini aňladýar.

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\delta_{iy}^2}{S_y^2}} \qquad (6)$$

(6) -ululyk emperiçeski korrelýasion gatnaşyk adyna eýedir.

X bilen şertlenen γ umumy barýasiýanyň bölegine η^2_{yx} determinasiýa koefisiýenti diýip atlandyrylýar.

Edil ýokarda görkezilişi ýaly emperiçeski korrelýasiýa xy-a görä gatnaşygy aşakdaky ýaly bildirmek bolar.

$$\eta_{xy} = \sqrt{\frac{\delta_{jx}^2}{S_x^2}} \qquad (7)$$

(7) - emperiçeski korrelýasiýa gatnaşygy η_{xy} yi-yň bahalaryny endigan birleşmesinde aňladýan emperiçeski regressiýa görnüşine görä korrelýasion meýdanyň nokatlarynyň dagynlyk derejesiniň görkezijisidir.

Netijede alynan R_{xy} teoretiki korrelýasiýa gatnaşygy ýa-da X-a görä Y korrelýasiýa indeksisy.

$$R_{yx} = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{S_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{S_y'^2}{S_y^2}} \qquad (8)$$

Edil şunuň ýaly

$$R_{xy} = \sqrt{\frac{\delta_x^2}{S_x^2}} = \sqrt{1 - \frac{S_x'^2}{S_x^2}} \qquad (9)$$

Korrelýasion gatnaşyk η we R- koefisiýent korrelýasiýa r bilen aşakdaky ýaly baglanyşyga eýedir.

$$0 \le |r| \le R \le \eta \le 1 \qquad (10)$$

Üýtgeýänleriň özara çyzykly baglanyşygy ýagdaýy

$R_{yx} = R_{xy} = |r|$. η we r arasyndaky tapawudyň korrelýasion baglanyşygyň çyzyklylygyny barlamak üçin ulanmak bolar.

Korrelýasion gatnaşyk η-niň manylylygyny barlamak statistikasy aşakdakydan esaslanan.

$$F = \frac{\eta^2(n-m)}{(1-\eta^2)(m-1)}$$

Bu ýerde m-toparlanyş nyşany boýunça aralyklaryň sany

m-toparlanyş nyşany boýunça aralyklaryň sany aşakdaky mysala seredeliň.

Esasy önümçilik fondy mln manat x	Ortaça aralyklar						Ähli η_j	Toparlaýyn ortaça, T $\bar{y}$
		7-11	11-15	15-19	19-23	23-27		
	y_i / x_i	q	13	17	21	25		
20-25	22,5	2	1	-	-	-	3	10,3
25-30	17,5	3	6	4	-	-	13	13,3
30-35	32,5	-	3	11	7	-	21	17,8
35-40	37,5	-	1	2	6	2	11	20,3
40-45	42,5	-	-	-	1	1	2	23,0
Ähli η_j		5	11	17	14	3	50	-
Toparlaýyn ortaça $\bar{\chi}_j$ mln.manat		25,5	29,3	31,9	35,4	39,2	-	-

Tablisa 1-dan korrelýasiýa gatnaşygy η_{xy}, indeks korrelýasiýa R_{yx} we onuň makylylygyna barlamaly. Ilki başda η_{xy} kesgitläliň. Öňden hasaplanan umumy ortaça $\bar{y}$ =16,92, dispersiýa $S_y^2 = 18,2336 \approx 18,23,$ toparlaýyn ortaça $\bar{y}i$. Aralygyň ýygylygy n_i

Hasaplama amatlylyk üçin aşakdaky tablisany girizeliň.

x_j	n_i	$\bar{y}_i$	$(\bar{y}-\bar{y})^2 n_i$	y_{xj}	$(y_{xj}-\bar{y})^2 n_j$
22,5	3	10,3	131,5	10,4	127,5
27,5	13	13,3	170,4	13,8	126,5
32,5	21	17,8	16,3	17,2	1,6
37,5	11	20,3	125,7	20,6	149,0
42,5	2	23,0	73,9	23,9	97,4
	$\sum$		517,8	-	502,0

(5)-boýunça $\delta^2_{iy} = \frac{517,8}{50} = 10,36$ we (6) boýunça $\eta_{yx} = \sqrt{\frac{10,36}{18,23}} = \sqrt{0,568} = 0,754$

η_{yx}- bahasy r- 0,740 ululygy golaýdyr.

Munyň özi üýtgeýänleriň arasyndaky korrelýasion baglanyşygyň çyzyklylygyny aňladýar.

R_{yx}- hasaplamak üçin y_x= 0,6762x4,79 hasaplanan deňlemeden y_{xi} bahasyny alarys.

Edil şonuň şonuň $\delta_y^2 = \frac{502,0}{50} = 10,04$ we

$$R_{yx} = \sqrt{\frac{10,04}{18,23}} = \sqrt{0,551} = 0,742$$

Toparlaýyn nyşan boýunça aralyklaryň sanynyň = 5 deňligini gözeginde tutyp η_{yx}- yň makylylygyny barlamak üçin

$$F = \frac{0,754^2 \cdot (50-5)}{(1-0,754)^2(5-1)} = 14,82 \quad \text{taparys}$$

Tablisa bahasy $F_{0,05;\,4;\,45}$=2,57 şeýlelikde

$F>F_{0,005;\,4,\,45}$=2,57 onda η_{yx} manylylygy nuldan tapawutlanýar.

Edil şonuň ýaly R_{yx} üçin hem

$$F = \frac{0,742^2 \cdot (50-2)}{(1-0,742)^2} = 58,8 \text{ şeýledigini}$$

Hasaba alsak $F>F_{0,005;\,1,\,48}$ = 4,04 korrelýasiýa indeksi R_{yx} manylyly.

§4.5. Köp faktorly korrelýasion derňew barada düşinje.

Ykdysady hadysalar beýlekilere görä köp faktorly modelleriň üsti hem öňki sereden iki ölçegli korrelýasion modelimizi üýtgegän ýagdaý umumylaşdyrmak zerurlygy ýüze çykýar.

Goý $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots x_p$, özara hormat kanun boýunça paýlanan tötän üýtgeýänleriň toplumy bolsun.

Bu ýagdaý

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M[(X-a_x)(Y-a_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (1)$$

(1) formula bilen kesgitlenen S_{ij} jübüt korrelýasiýa koefisiýentlerinden düzülen tablisa aşakdaky görnüşi alar.

$$Q_\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1\rho} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2\rho} \\ . & . & . & . \\ \rho_{\rho 1} & \rho_{\rho 2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Köp faktorly korrelýasion derňewiň esasy meselesi Q_o korrelýasion matrisa çeşme (saýlama-выбрат) boýunça nähili görnüşde baha bermekden durýar.

Bu mesele çözilende saýlama korrelýasiýa koefisiýentleriň matrisasyny kesgitleär.

$$q\rho = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1\rho} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2\rho} \\ . & . & . & . \\ r_{\rho 1} & r_{\rho 2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Bu ýerde $r_{ij}= r_{ij}$ (i,j=1,2,...,p) aşakdaky formula bilen kesgitlenýär.

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{e}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x)(y_i - y)n_{ij}}{nS_xS_y} \qquad (4)$$

Köpfaktorly korrelýasion derňewde iki tipli meselä seredilýär.

1) Toplumyň haýsy hem bolsa bir üýtgeýäniň alan (P-1) derňewe goşulsa üýtgeýäni bilen jebislik baglanyşygy kesgitlenýär.
2) Belenilen (финсировании) üýtgeýänler ýa-da q täsiri düşürlenleriň özara baglanyşygynyň jebisligini kesgitlenýär.

bu ýerde $q \leq (p-2)$

Bu mesele köpfaktorly ýa-da hususy korrelýasiýa koefisiýentleriniň kömegi bilen çözülýär.

Köpfaktorly korrelýasiýa koefisiýenti aşakdaky formula boýunça hasaplanýar.

$$R1,2,...p = \sqrt{1 - \frac{|q_p|}{p_{ij}}} \qquad (5)$$

bu ýerde $|q_p|$-materialynyň kesgitlejisi

q_{ij} - r_{ii} elementli algebraýik doldurgyç.

Hususy ýagdaýda üýtgeýänleriň p=3 ýagdaýynda (5) –deň gelipçykar.

$$R_{i.jk} = \frac{\sqrt{r_{ij}^2 + r_{ik}^2 - 2r_{ij} \cdot r_{ik} \cdot r_{jk}}}{1 - r_{jk}^2} \qquad (6)$$

Köpfaktorly korrelýasiýa koefisiýenti $0 \le R \le 1$ çäklenendir.

Köpfaktorly korrelýasiýa koefisiýentiniň (ölçeginiň R-iň 1-a ýakynlaşmasynda) kömegi bilen özara baglaşygyň jebisligi we onuň nyrhynda netije çykarmak bolar.

Mysal. Zähmet öndürijiligi (x_3) bolanda şol bir hünärli 100 işçiden işçi üçin özara baglanyşygy barlamaly.

Jübit korrelýasiýa koefisiýenti hasaplamada

r_{12}=0,25; r_{13}=0,41; r_{23}=0,82;

$$R_{1,2,3} = \frac{\sqrt{0{,}20^2 + 0{,}41^2 - 2.0{,}20.0{,}41.0{,}82}}{1 - 0{,}82^2} = \sqrt{0{,}225 = 0{,}47}$$

Edebiýatlar.

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. T I II III. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. T I II III. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.

10. Аллен Р. Математическая экономия. М., Издательство иностранной литературы, 1999
11. Езекиэл М., Фокс К. Методы анализа корреляций и регрессий линейных и прямолинейных М., Статистика, 1996
12. Лукомский Я.И. Теория корреляции и её применение к анализу производства. М., Госстатиздат, 1998
13. Методы планирования межотраслевых пропорций. М., Экономика, 2005
14. Немчинов В.С. Экономико математические методы и модели. М., Мысль, 2005
15. Перегудов В.Н. Метод наименьших квадратов и его применение в исследованиях. М., Статистика, 1995
16. Применение математики в экономических исследованиях, том 1. М., Соцэкгиз, 1959; том 2. М., Соцэкгиз, 1961; том 3. М.,Мысль, 1965
17. Применение математики при размещении производительных сил. М., Наука, 2004 /Под ред. Хайкина В.П. и др.
18. Корреляция и статистическое моделирование в экономических расчётах. М., Экономика, 2004

Mazmuny.